



Universidad
Carlos III de Madrid

Departamento de Ingeniería Mecánica

PROYECTO FIN DE CARRERA

MODELO DINÁMICO DE RODAMIENTO. APLICACIÓN INFORMÁTICA SIMROD

Autor: García Barreiro, Jose Luis

Tutor: Rubio Alonso, Higinio

Leganés, Julio de 2010

Título:
Autor:
Director:

EL TRIBUNAL

Presidente: _____

Vocal: _____

Secretario: _____

Realizado el acto de defensa y lectura del Proyecto Fin de Carrera el día __ de _____
de 20__ en Leganés, en la Escuela Politécnica Superior de la Universidad Carlos III de
Madrid, acuerda otorgarle la CALIFICACIÓN de

VOCAL

SECRETARIO

PRESIDENTE

Agradecimientos

A mi familia, mi padre, mi madre y mi hermana, por hacer posible que este proyecto haya tenido lugar. Sin vosotros nunca hubiera estado aquí.

A mi novia Alba, por haber soportado pacientemente todos estos meses de trabajo, y haber estado a mi lado siempre que lo he necesitado.

A mi tutor Higinio, por las duras horas de trabajo codo con codo, los buenos ratos pasados durante la realización de este proyecto y la gran ayuda que siempre me ha prestado.

A todos, muchas gracias.

Resumen

Estudio y evolución de modelos analíticos de rodamiento, aplicando mecánica Newtoniana y Lagrangiana. Estimación de sensibilidad de parámetros con mayor influencia y estudios de estabilidad-linealidad. Desarrollo de aplicación informática para introducción y tratamiento de datos, aplicando técnicas de simulación e implementación en entorno Matlab-Simulink-GUI, y estudiando los resultados con las principales técnicas de análisis en los campos del tiempo y la frecuencia.

Palabras clave: rodamiento, vibración, simulación, dinámica.

Abstract

Study and development of analytical bearing models, using Newtonian and Lagrangian mechanics. Estimation of sensitivity of most influential parameters and stability-linearity studies. Development of software application for data input and processing, applying and implementing simulation techniques in Matlab-Simulink-GUI, and studying the results with the main analytical techniques in the fields of time and frequency.

Keywords: bearing, vibration, simulation, dynamics.

Índice general

INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS	1
1.1 Introducción	1
1.2 Objetivos	4
1.3 Fases de desarrollo	5
1.4 Medios empleados.....	7
1.5 Estructura de la memoria	9
VIBRACIONES MECÁNICAS EN MÁQUINAS ROTATIVAS	11
2.1 El fenómeno vibratorio en máquinas	11
2.2 Tratamiento de señales	15
2.2.1 La transformada de Fourier.....	15
2.2.2 PSD y potencia espectral	22
2.2.3 Envolvente y espectro de la envolvente.....	23
2.2.4 Spike-Energy	31
2.2.5 Análisis Wavelet.....	33
2.3 Comportamiento vibratorio del rodamiento con defecto localizado.....	45
2.3.1 Frecuencias rotacionales	46
2.3.2 Zonas del espectro de defectos	49
2.3.3 Evolución espectral del desarrollo de los defectos	50
2.3.4 Factores que modifican las frecuencias de defecto.....	53
MODELO CINEMÁTICO-DINÁMICO DEL RODAMIENTO	55

ÍNDICE general

3.1 Cinemática y dinámica de los rodamientos.....	55
3.2 Modelo de 2 G.D.L.	62
3.2.1 Ecuaciones cartesianas.....	62
3.2.2 Ecuaciones diferenciales del movimiento del modelo con 2 G.D.L.....	73
3.3 Modelo de 2+Z G.D.L.....	74
3.3.1 Modelado del sistema. Ecuaciones de Newton.....	74
3.3.2 Modelado del sistema. Ecuaciones de Lagrange	76
3.4 Particularización de las ecuaciones a modelos de 5 y 11 G.D.L.....	83
3.4.1 Modelo con ecuaciones de Newton	83
3.4.2 Modelo con ecuaciones de Lagrange.....	85
3.5 Incorporación de defectos localizados	88
IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO EN MATLAB-SIMULINK	93
4.1 Proceso de implementación.....	93
4.1.1 Datos de entrada de los modelos.....	94
4.1.2 Modelos de 5 G.D.L: Diagramas de bloques en Newton y Lagrange	96
4.1.2.1 Bloques generales.....	97
4.1.2.2 Bloque Movimiento	99
4.1.2.3 Bloque Ecuación X	103
4.1.2.4 Bloque Ecuación Y	104
4.1.2.5 Modelos de 5 G.D.L: Bloques Elemento para el modelo de Newton	105
4.1.2.6 Modelos de 5 G.D.L: Bloques Elemento para el modelo de Lagrange.....	108
4.1.3 Modelos de 11 G.D.L: Diagramas de bloques en Newton y Lagrange	111
4.1.3.1 Bloques generales.....	111
4.1.3.2 Bloque Movimiento	115
4.1.3.3 Bloque Ecuación X	118
4.1.3.4 Bloque Ecuación Y	119
4.1.3.5 Modelos de 11 G.D.L: Bloques Elemento para el modelo de Newton	120
4.1.3.6 Modelos de 11 G.D.L: Bloques Elemento para el modelo de Lagrange.....	120
4.2 Resumen de aportaciones	122
PRUEBAS DE ESTABILIDAD-LINEALIDAD	131
5.1 Análisis de resultados de los modelos.....	131
5.2 Gráficas de resultados	135

5.2.1 Aceleraciones del C.A.I.	135
5.2.1.1 Variación de Fex	135
5.2.1.2 Variación de Fey	138
5.2.1.3 Variación de la fuerza de desequilibrio del rotor	140
5.2.1.4 Variación de la velocidad de giro del rotor	142
5.2.1.5 Variación de la masa del rotor	145
5.2.2 Deformaciones.	147
5.2.2.1 Variación de Fex	147
5.2.2.2 Variación de la fuerza de desequilibrio del rotor	150
5.2.2.3 Variación de la velocidad de giro del rotor	152
5.2.2.4 Variación de la masa del rotor	156
5.2.3 Fuerzas	158
5.2.3.1 Variación de Fex	158
5.2.3.2 Variación de la fuerza de desequilibrio del rotor	160
5.2.4 Conclusiones	162
5.2.5 Análisis pormenorizado de defectos y fuerzas.	163
5.2.5.1 Modelos de 5 G.D.L.	167
5.2.5.2 Modelos de 11 G.D.L.	167
5.3 Análisis en frecuencia	169
5.3.1 Verificación de armónicos para rodamientos con defecto	169
5.3.2 Comparación de señales temporales y espectros de frecuencia	174
5.3.3 Comparación de señales a distintas velocidades de rotación: Modelo de 5 G.D.L.	181
5.3.3.1 Defecto en pista interior	181
5.3.3.2 Defecto en pista exterior	186
5.3.4 Comparación de señales a distintas velocidades de rotación: Modelo de 11 G.D.L.	190
5.3.4.1 Defecto en pista interior	190
5.3.4.2 Defecto en pista exterior	192
PROGRAMA SIMROD	199
6.1 Manual de uso de SIMROD	199
6.1.1 Introducción de datos	200
6.1.1.1 Pantalla de selección del modelo	201
6.1.1.2 Pantalla de datos geométricos	202
6.1.1.3 Pantalla de datos físicos	204

ÍNDICE general

6.1.1.4 Pantalla de definición de defectos.....	205
6.1.1.5 Pantalla de datos de funcionamiento.....	207
6.1.2 Análisis de resultados	208
6.1.2.1 Gráficas de resultados	209
6.1.2.2 Otras gráficas: Análisis en frecuencia.....	216
6.1.2.3 Resultados estadísticos.....	222
6.2 Funcionalidades adicionales.....	224
CONCLUSIONES.....	227
7.1 Conclusiones	227
7.2 Trabajos futuros.....	229
PRESUPUESTO	231
GLOSARIO	233
REFERENCIAS	235

Índice de figuras

Figura 1.1 Cojinete esférico	2
Figura 1.2 Rodamientos de bolas	2
Figura 1.3 Croquis del modelo de rodamiento ideado por Leonardo da Vinci.....	3
Figura 1.4 Diagrama explicativo de las fases de desarrollo del proyecto	6
Figura 1.5 Pantalla principal de Matlab	7
Figura 2.1. Señales temporales y espectros de frecuencia de distintos elementos.....	12
Figura 2.2. Señal temporal de un rodamiento con defecto en pista exterior en su primera fase.	14
Figura 2.3. Señal temporal de un rodamiento con defecto en pista exterior en estado avanzado de deterioro.	14
Figura 2.4. Transformada discreta de Fourier de una señal analógica.....	18
Figura 2.5. Representación espectral de la señal muestreada.	20
Figura 2.6. Espectro generado al reducir la frecuencia de muestreo.....	20
Figura 2.7. Efecto ‘leakage’.	21
Figura 2.8. Aplicación de la ventana temporal a una señal.....	21
Figura 2.9. Efecto ‘Picket-Fence’	22
Figura 2.10 Comparación de un espectro de vibración de un rodamiento nuevo y defectuoso.	24
Figura 2.11. Señal temporal del rodamiento defectuoso.....	25
Figura 2.12. Envolvente de la señal temporal del rodamiento defectuoso.....	25
Figura 2.13. Espectro de la envolvente de la señal temporal del rodamiento defectuoso.	25

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.14. Proceso de demodulación.	26
Figura 2.15. Esquema del proceso de análisis de una señal mediante la Spike-Energy. ...	32
Figura 2.16. Señal temporal.	33
Figura 2.17. Espectro de la envolvente de la señal temporal representada en la figura 2.16.	34
Figura 2.18. Transformada STFT.	34
Figura 2.19. Representación en tiempo-frecuencia: a la izquierda, mejor resolución temporal; a la derecha, mejor resolución en frecuencias.	35
Figura 2.20. Distintos tipos de transformaciones.	36
Figura 2.21. Dilatación y traslación de una wavelet madre.	37
Figura 2.22. Proceso de análisis wavelet I.	37
Figura 2.23. Proceso de análisis wavelet II.	38
Figura 2.24. Proceso de análisis wavelet III.	38
Figura 2.25. Proceso de análisis wavelet IV.	38
Figura 2.26. Wavelet Haar.	40
Figura 2.27. Wavelets de la familia Daubechies.	40
Figura 2.28. Wavelets de la familia biortogonales.	41
Figura 2.29. Wavelets de la familia Coiflets.	41
Figura 2.30. Wavelets de la familia Symlets.	42
Figura 2.31. Wavelet Morlet.	42
Figura 2.32. Wavelet Mexican Hat.	42
Figura 2.33. Procedimiento seguido en la Wavelet discreta I.	43
Figura 2.34. Procedimiento seguido en la Wavelet discreta II.	44
Figura 2.35. Procedimiento seguido en la transformada Wavelet discreta inversa.	45
Figura 2.36. Parámetros cinemáticos del rodamiento.	46
Figura 2.37. Espectro de frecuencia característico de la vibración generada por un rodamiento defectuoso.	49
Figura 2.38. Espectro representativo del estado I de la evolución del defecto en el rodamiento.	50
Figura 2.39. Espectro representativo del estado II de la evolución del defecto en el rodamiento.	51
Figura 2.40. Espectro representativo del estado III de la evolución del defecto en el rodamiento.	52
Figura 2.41. Espectro representativo del estado IV de la evolución del defecto en el rodamiento.	53
Figura 3.1. Esquema de las principales partes constitutivas de un rodamiento.	56
Figura 3.2. Diagrama del comportamiento cinemático de un rodamiento.	56

Figura 3.3. Distribución de fuerzas en los elementos rodantes.....	58
Figura 3.4. Distribución de la carga en un rodamiento con distintos valores de holguras.	60
Figura 3.5. Gráfica de la integral $J_r(\epsilon)$ en función de a y b	61
Figura 3.6. Elipsoide representativo de las tensiones según la teoría de Hertz.	62
Figura 3.7. Modelo masa-muelle-amortiguamiento del rodamiento.....	63
Figura 3.8. Radios de curvatura en el contacto bola-anillo interior.	64
Figura 3.9. Dimensiones del rodamiento de bolas 6206.	64
Figura 3.10. Obtención de los parámetros a^* , b^* y δ^* para el contacto bola-pista interior.	65
Figura 3.11. Radios de curvatura en el contacto bola-anillo exterior.	66
Figura 3.12. Obtención de los parámetros a^* , b^* y δ^* para el contacto bola-pista exterior.	67
Figura 3.13. Modelo de rodamiento.....	69
Figura 3.14. Diagrama del sólido libre del anillo interior.....	70
Figura 3.15. Esquema de las deformaciones en el contacto elemento rodante- pista interior.	71
Figura 3.16. Esquema de las deformaciones en el contacto elemento rodante- pista exterior.	72
Figura 3.17. Esquema Diagrama del sólido libre sobre un elemento rodante.....	74
Figura 3.18. Fuerzas sobre el elemento rodante, aplicando la simplificación del ángulo β	75
Figura 3.19. Esquema del defecto en anillo exterior.....	89
Figura 3.20. Esquema de defecto en anillo interior.	91
Figura 4.1. Bloques Movimiento, Ecuaciones X e Y y Elementos 1, 2 y 3.....	97
Figura 4.2. Bloques visualizadores de los parámetros calculados por el sistema.	98
Figura 4.3. Bloques generadores del movimiento del rotor y los elementos rodantes.....	99
Figura 4.4. Adición de los bloques para el cálculo de la posición del defecto en pista interior.	101
Figura 4.5. Diagrama de bloques para el cálculo de los encuentros elemento rodante- defecto en pista interior.	101
Figura 4.6. Diagrama de bloques para el cálculo de los encuentros elemento rodante- defecto en pista exterior.	102
Figura 4.7. Diagrama de bloques para la implementación de la ecuación X.	103
Figura 4.8. Diagrama de bloques para la implementación de la ecuación Y.....	104
Figura 4.9. Diagramas de bloques para la implementación de las ecuaciones 3.96, 3.97 y 3.98 (1 de 2)	106

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 4.9 (bis). Diagramas de bloques para la implementación de las ecuaciones 3.96, 3.97 y 3.98 (2 de 2)	106
Figura 4.10. Diagrama de bloques para la implementación de la ecuación X. (1 de 3)..	108
Figura 4.10. (bis 1) Diagrama de bloques para la implementación de la ecuación X. (2 de 3).....	109
Figura 4.10. (bis 2) Diagrama de bloques para la implementación de la ecuación X. (3 de 3).....	110
Figura 4.11. Bloques Movimiento, Ecuaciones X e Y y Elementos 1- 9. (1 de 2)	112
Figura 4.11. (bis) Bloques Movimiento, Ecuaciones X e Y y Elementos 1- 9. (2 de 2). 113	
Figura 4.12. Bloques visualizadores de los parámetros calculados por el sistema. (1 de 2)	113
Figura 4.12. (bis) Bloques visualizadores de los parámetros calculados por el sistema. (2 de 2).....	114
Figura 4.13. Bloques generadores del movimiento del rotor y los elementos rodantes..	115
Figura 4.14. Diagrama de bloques para el cálculo de los encuentros elemento rodante-defecto en pista exterior.	116
Figura 4.15. Diagrama de bloques para el cálculo de los encuentros elemento rodante-defecto en pista interior.	117
Figura 4.16. Diagramas de bloques para la implementación de la ecuación X.....	118
Figura 4.17. Diagramas de bloques para la implementación de la ecuación Y.....	119
Figura 4.18. Esquema de bloques original para el cálculo de la fuerza centrífuga.	121
Figura 4.19. Esquema de bloques corregido para el cálculo de la fuerza centrífuga.	122
Figura 4.20. Esquema de bloques simplificado para el cálculo de las deformaciones interiores.....	122
Figura 4.21. Esquema de bloques simplificado para el cálculo de las deformaciones exteriores.	123
Figura 4.22. Esquema de bloques corregido para el cálculo de la fuerza centrífuga.	123
Figura 4.23. Esquema de bloques original para el cálculo del peso de los elementos rodantes.	123
Figura 4.24 .Esquema de bloques corregido para el cálculo del peso de los elementos rodantes.	124
Figura 4.25. Adición de bloques para el cálculo de fuerzas interiores.....	124
Figura 4.26. Fragmento del esquema de bloques original para el cálculo del parámetro pi.	125
Figura 4.27. Fragmento del esquema de bloques corregido para el cálculo del parámetro pi.....	125
Figura 4.28. Esquema de la asociación de constantes de rigidez en serie, considerando $\beta=0$	127
Figura 4.29. Esquema del desplazamiento del C.A.I. causa por las fuerzas externas.....	128

Figura 5.1. Evolución de aceleración del C.A.I, coordenada X; Modelo actual.....	136
Figura 5.2. Evolución de aceleración del C.A.I, coordenada X; Modelo original.....	136
Figura 5.3. Evolución de aceleración del C.A.I, coordenada Y; Modelo actual.....	137
Figura 5.4. Evolución de aceleración del C.A.I, coordenada Y; Modelo original.....	137
Figura 5.5. Evolución de aceleración del C.A.I, coordenada X; Modelo actual.....	138
Figura 5.6. Evolución de aceleración del C.A.I, coordenada X; Modelo original.....	138
Figura 5.7. Evolución de aceleración del C.A.I, coordenada Y; Modelo actual.	139
Figura 5.8. Evolución de aceleración del C.A.I, coordenada Y; Modelo original.....	139
Figura 5.9. Evolución de aceleración del C.A.I, coordenada X; Modelo actual.....	140
Figura 5.10. Evolución de aceleración del C.A.I, coordenada X; Modelo original.....	140
Figura 5.11. Evolución de aceleración del C.A.I, coordenada Y; Modelo actual.....	141
Figura 5.12. Evolución de aceleración del C.A.I, coordenada Y; Modelo original.....	141
Figura 5.13. Vista general de la evolución de aceleración del C.A.I, coordenada X; Modelo actual.....	142
Figura 5.14. Vista detalle de la evolución de aceleración del C.A.I, coordenada X; Modelo actual.....	143
Figura 5.15. Evolución de aceleración del C.A.I, coordenada X; Modelo original.....	143
Figura 5.16. Vista general de la evolución de aceleración del C.A.I, coordenada Y; Modelo actual.....	144
Figura 5.17. Vista detalle de la evolución de aceleración del C.A.I, coordenada Y; Modelo original.....	144
Figura 5.18. Evolución de aceleración del C.A.I, coordenada Y; Modelo original.....	145
Figura 5.19. Evolución de aceleración del C.A.I, coordenada X; Modelo actual.....	145
Figura 5.20. Evolución de aceleración del C.A.I, coordenada X; Modelo original.....	146
Figura 5.21. Evolución de aceleración del C.A.I, coordenada Y; Modelo actual.....	146
Figura 5.22. Evolución de aceleración del C.A.I, coordenada Y; Modelo original.....	147
Figura 5.23. Evolución de deformaciones en el contacto elemento- pista interior; Modelo actual.....	148
Figura 5.24. Evolución de deformaciones en el contacto elemento- pista interior; Modelo original.....	148
Figura 5.25. Evolución de deformaciones en el contacto elemento- pista exterior; Modelo actual.....	149
Figura 5.26. Evolución de deformaciones en el contacto elemento- pista exterior; Modelo original.....	149
Figura 5.27. Evolución de deformaciones en el contacto elemento- pista interior; Modelo actual.....	150
Figura 5.28. Evolución de deformaciones en el contacto elemento- pista interior; Modelo original.....	150

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 5.29. Evolución de deformaciones en el contacto elemento- pista exterior; Modelo actual.	151
Figura 5.30. Evolución de deformaciones en el contacto elemento- pista exterior; Modelo original.	151
Figura 5.31. Vista general de la evolución de deformaciones en el contacto elemento- pista interior; Modelo actual.	152
Figura 5.32. Vista detalle de la evolución de deformaciones en el contacto elemento- pista interior; Modelo actual.	153
Figura 5.33. Evolución de deformaciones en el contacto elemento- pista interior; Modelo original.	153
Figura 5.34. Vista general de la evolución de deformaciones en el contacto elemento- pista exterior; Modelo actual.	154
Figura 5.35. Vista detalle de la evolución de deformaciones en el contacto elemento- pista exterior; Modelo actual.	154
Figura 5.36. Evolución de deformaciones en el contacto elemento- pista exterior; Modelo original.	155
Figura 5.37. Evolución de deformaciones en el contacto elemento- pista interior; Modelo actual.	156
Figura 5.38. Evolución de deformaciones en el contacto elemento- pista interior; Modelo original.	156
Figura 5.39. Evolución de deformaciones en el contacto elemento- pista exterior; Modelo actual.	157
Figura 5.40. Evolución de deformaciones en el contacto elemento- pista exterior; Modelo original.	157
Figura 5.41. Evolución de fuerzas de contacto elemento- pista interior; Modelo actual.	158
Figura 5.42. Evolución de fuerzas de contacto elemento- pista interior; Modelo original.	160
Figura 5.43. Evolución de fuerzas de contacto elemento- pista exterior; Modelo actual.	160
Figura 5.44. Evolución de fuerzas de contacto elemento- pista exterior; Modelo original.	161
Figura 5.45. Evolución de fuerzas de contacto elemento- pista interior; Modelo actual.	161
Figura 5.46. Evolución de fuerzas de contacto elemento- pista interior; Modelo original.	162
Figura 5.47. Evolución de fuerzas de contacto elemento- pista exterior; Modelo actual.	162
Figura 5.48. Evolución de fuerzas de contacto elemento- pista exterior; Modelo original.	162
Figura 5.49. Deformaciones en el contacto elemento- pista interior en el modelo original.	164
Figura 5.50. Fuerzas de contacto elemento- pista interior en el modelo original.	164

Figura 5.51. Adición de bloques para la obtención de las deformaciones y fuerzas reales.	165
Figura 5.52. Deformaciones en el contacto elemento- pista interior para el modelo de Newton actual (5 G.D.L.)	166
Figura 5.53. Fuerzas de contacto elemento- pista interior para el modelo de Newton actual (5 G.D.L.)	166
Figura 5.54. Deformaciones en el contacto elemento- pista interior para el modelo de Newton actual (11 G.D.L.)	168
Figura 5.55. Fuerzas de contacto elemento- pista interior para el modelo de Newton actual (11 G.D.L.)	168
Figura 5.56. Evolución de la aceleración en dirección Y en el tiempo	170
Figura 5.57. Espectro de la señal temporal de la coordenada Y de la aceleración del C.A.I.	170
Figura 5.58. Espectro de la envolvente de la señal temporal de la coordenada Y de la aceleración del C.A.I.	171
Figura 5.59. Evolución de la aceleración en dirección Y en el tiempo	172
Figura 5.60. Espectro de la señal temporal de la coordenada Y de la aceleración del C.A.I.	172
Figura 5.61. Espectro de la envolvente de la señal temporal de la coordenada Y de la aceleración del C.A.I.	173
Figura 5.62. Comparativa de las señales de aceleración para los casos contemplados por el programa (Modelo de 5 G.D.L.)	175
Figura 5.63. Comparativa de los espectros de la señal para los casos contemplados por el programa. (Modelo de 5 G.D.L.)	175
Figura 5.64. Comparativa de los espectros de la envolvente para los casos contemplados por el	176
Figura 5.65. Wavelets para el caso de rodamiento sin defecto (Modelo de 5 G.D.L.)	176
Figura 5.66. Wavelets para el caso de rodamiento con defecto en pista interior (Modelo de 5 G.D.L.)	177
Figura 5.67. Wavelets para el caso de rodamiento con defecto en pista exterior (Modelo de 5 G.D.L.)	177
Figura 5.68. Comparativa de las señales de aceleración para los casos contemplados por el programa. (Modelo de 11 G.D.L.)	178
Figura 5.69. Comparativa de los espectros de la señal para los casos contemplados por el programa. (Modelo de 11 G.D.L.)	178
Figura 5.70. Comparativa de los espectros de la envolvente para los casos contemplados por el programa. (Modelo de 11 G.D.L.)	179
Figura 5.71. Wavelets para el caso de rodamiento sin defecto (Modelo de 11 G.D.L.)	179
Figura 5.72. Wavelets para el caso de rodamiento con defecto en pista interior (Modelo de 11 G.D.L.)	180

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 5.73. Wavelets para el caso de rodamiento con defecto en pista exterior (Modelo de 11 G.D.L.).....	180
Figura 5.74. Señales de aceleración para diferentes velocidades de rotación del rotor. (Modelo de 5 G.D.L.).....	181
Figura 5.75. Espectros de la señal para diferentes velocidades de rotación del rotor. (Modelo de 5 G.D.L.).....	182
Figura 5.76. Espectros de la envolvente para diferentes velocidades de rotación del rotor. (Modelo de 5 G.D.L.).....	183
Figura 5.77. Wavelets para velocidad de rotación del rotor de 10 Hz (Modelo de 5 G.D.L.).	184
Figura 5.78. Wavelets para velocidad de rotación del rotor de 20 Hz (Modelo de 5 G.D.L.).	184
Figura 5.79. Wavelets para velocidad de rotación del rotor de 30 Hz (Modelo de 5 G.D.L.).	185
Figura 5.80. Wavelets para velocidad de rotación del rotor de 40 Hz (Modelo de 5 G.D.L.).	185
Figura 5.81. Señales de aceleración para diferentes velocidades de rotación del rotor. (Modelo de 5 G.D.L.).....	186
Figura 5.82. Espectros de la señal para diferentes velocidades de rotación del rotor. (Modelo de 5 G.D.L.).....	186
Figura 5.83. Espectros de la envolvente para diferentes velocidades de rotación del rotor. (Modelo de 5 G.D.L.).....	187
Figura 5.84. Wavelets para velocidad de rotación del rotor de 10 Hz (Modelo de 5 G.D.L.).	187
Figura 5.85. Wavelets para velocidad de rotación del rotor de 20 Hz (Modelo de 5 G.D.L.).	188
Figura 5.86. Wavelets para velocidad de rotación del rotor de 30 Hz (Modelo de 5 G.D.L.).	188
Figura 5.87. Wavelets para velocidad de rotación del rotor de 40 Hz (Modelo de 5 G.D.L.).	189
Figura 5.88. Señales de aceleración para diferentes velocidades de rotación del rotor. (Modelo de 11 G.D.L.).....	190
Figura 5.89. Espectros de la señal para diferentes velocidades de rotación del rotor. (Modelo de 11 G.D.L.).....	191
Figura 5.90. Espectros de la envolvente para diferentes velocidades de rotación del rotor. (Modelo de 11 G.D.L.).....	192
Figura 5.91. Wavelets para velocidad de rotación del rotor de 10 Hz (Modelo de 11 G.D.L.).	193
Figura 5.92. Wavelets para velocidad de rotación del rotor de 20 Hz (Modelo de 11 G.D.L.).	193
Figura 5.93. Wavelets para velocidad de rotación del rotor de 30 Hz (Modelo de 11 G.D.L.).	194

Figura 5.94. Wavelets para velocidad de rotación del rotor de 40 Hz (Modelo de 11 G.D.L.).	194
Figura 5.95. Señales de aceleración para diferentes velocidades de rotación del rotor. (Modelo de 11 G.D.L.).	195
Figura 5.96. Espectros de la señal para diferentes velocidades de rotación del rotor. (Modelo de 11 G.D.L.).	195
Figura 5.97. Espectros de la envolvente para diferentes velocidades de rotación del rotor. (Modelo de 11 G.D.L.).	196
Figura 5.98. Wavelets para velocidad de rotación del rotor de 10 Hz (Modelo de 11 G.D.L.).	196
Figura 5.99. Wavelets para velocidad de rotación del rotor de 20 Hz (Modelo de 11 G.D.L.).	197
Figura 5.100. Wavelets para velocidad de rotación del rotor de 30 Hz (Modelo de 11 G.D.L.).	197
Figura 5.101. Wavelets para velocidad de rotación del rotor de 40 Hz (Modelo de 11 G.D.L.).	198
Figura 6.1. Diagrama de introducción de datos y pantallas de análisis.	200
Figura 6.2 Pantalla que muestra la portada del programa SIMROD.	201
Figura 6.3. Pantalla de selección de modelo de simulación y tipo de elemento.	202
Figura 6.4. Pantalla de introducción de datos geométricos para elementos tipo bola.	203
Figura 6.5. Pantalla de introducción de datos geométricos para elementos tipo rodillo.	204
Figura 6.6. Pantalla de introducción de constantes de rigidez y amortiguamientos para elementos rodantes del tipo bola.	205
Figura 6.7. Pantalla de introducción de constantes de rigidez y amortiguamientos para elementos rodantes del tipo rodillo.	205
Figura 6.8. Pantalla para definición de defectos (caso sin defecto).	206
Figura 6.9. Pantalla para definición de defectos (caso defecto en pista interior).	206
Figura 6.10. Pantalla para definición de defectos (caso defecto en pista exterior).	207
Figura 6.11. Pantalla para introducción de datos de funcionamiento y simulación.	208
Figura 6.12. Pantalla de opciones para el análisis de resultados.	209
Figura 6.13. Diagrama de opciones del apartado “Gráficas”.	210
Figura 6.14. Pantalla de selección de parámetros para su visualización.	210
Figura 6.15. Pantalla de visualización de fuerzas por elemento rodante (3 elementos rodantes).	211
Figura 6.16. Pantalla de visualización de fuerzas por elemento rodante (9 elementos rodantes).	211
Figura 6.17. Pantalla de visualización de deformaciones por elemento rodante (3 elementos rodantes).	212

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 6.18. Pantalla de visualización de fuerzas por elemento rodante (9 elementos rodantes).....	212
Figura 6.19. Pantalla de visualización de posiciones radiales por elemento rodante (3 elementos rodantes).....	213
Figura 6.20. Pantalla de visualización de posiciones radiales por elemento rodante (9 elementos rodantes).....	213
Figura 6.21. Pantalla de visualización de velocidades radiales por elemento rodante (3 elementos rodantes).....	213
Figura 6.22. Pantalla de visualización de velocidades radiales por elemento rodante (9 elementos rodantes).....	214
Figura 6.23. Pantalla de visualización de aceleraciones radiales por elemento rodante (3 elementos rodantes).....	214
Figura 6.24. Pantalla de visualización de aceleraciones radiales por elemento rodante (9 elementos rodantes).....	214
Figura 6.24. Diagrama de opciones del apartado “Otros”.....	215
Figura 6.25. Pantalla de selección de opciones para el análisis en frecuencia.....	215
Figura 6.25. Gráfica de la evolución de la posición del C.A.I. en función de las coordenadas X e Y.	215
Figura 6.26 Muestra de las fuerzas de contacto elemento rodante-pistas interior y exterior.	215
Figura 6.27. Gráficas de las posiciones radiales de los elementos rodantes.	216
Figura 6.28. Diagrama de opciones del apartado “Otros”.....	217
Figura 6.29. Pantalla de selección de opciones para el análisis en frecuencia.....	217
Figura 6.30. Pantalla de selección del parámetro a analizar.	218
Figura 6.31. Envolvente de la señal temporal correspondiente a la aceleración en coordenada Y del C.A.I.	218
Figura 6.32. Espectro de la señal temporal correspondiente a la aceleración en coordenada Y del C.A.I.	219
Figura 6.33. Pantalla de la utilidad para el análisis del espectro de la envolvente.	219
Figura 6.34. Pantalla de selección de parámetros de la Wavelet.	220
Figura 6.35. Pantalla de selección de la Wavelet.	221
Figura 6.36. Pantalla de selección del orden de la Wavelet Daubechies.	221
Figura 6.37. Ejemplo de Wavelet Daubechies de orden 5.	222
Figura 6.38. Diagrama de opciones del apartado “Resultados estadísticos”.	222
Figura 6.39. Selección del parámetro para el análisis estadístico (3 elementos rodantes).	223
Figura 6.40. Selección del parámetro para el análisis estadístico (9 elementos rodantes).	223
Figura 6.41. Pantalla de visualización de los parámetros estadísticos.	224

Índice de tablas

Tabla 2.1. Reducción del número de operaciones de la FFT respecto a la DFT.	19
Tabla 2.2. Propiedades espectrales de algunas señales temporales.	22
Tabla 3.1. Valores de $1/J_r$ para los diferentes número de elementos rodantes.	60
Tabla 3.2. Valores de a^* , b^* y δ^* para el contacto bola-pista interior.	65
Tabla 3.3. Valores de a^* , b^* y δ^* para el contacto bola-pista exterior.	67
Tabla 5.1. Leyenda de interpretación de las tablas de resultados.	135
Tabla 8.1. Desglose del presupuesto del PFC.	232

ÍNDICE DE TABLAS

Capítulo 1

Introducción y objetivos

1.1 Introducción

La fricción siempre ha resultado un importante obstáculo a la hora de abordar cualquier diseño de maquinaria. Es una de las causas principales cuando se tratan aspectos como la eficiencia energética o el desgaste de los componentes y por ello influye decisivamente en las acciones de mantenimiento, puesto que dichos desgastes marcarán los períodos de revisión y cambio, factores que afectan al aspecto económico.

Por ello, a lo largo de la historia se han ideado diversos sistemas para reducir la fricción y facilitar el trabajo humano, constituyendo la ciencia que se conoce como tribología (del griego *tribos*, frotar o rozar). En la construcción de sus monumentos, los egipcios trasladaban enormes bloques de piedra mediante trineos o troncos situados bajo las piedras, a modo de rodillos de transporte; la misma invención de la rueda; utilización de agua o grasa como película intermedia para reducir el rozamiento, y un largo etcétera.

En particular, uno de los componentes de máquinas que más esfuerzos y fricción soportan son los ejes y los árboles. Con la sofisticación de las máquinas, se idearon elementos o técnicas específicos para desempeñar la labor de disminución del rozamiento, en búsqueda de unos coeficientes menores que elevasen los rendimientos y evitasen el desgaste.

- Lubricación: Intercalar una sustancia entre las piezas móviles de un mecanismo, creando una película que evita el roce (y por tanto el desgaste) de los componentes a

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

los que afecta. Pueden ser sólidos (grafito), líquidos (aceites) o gaseosos (gases a presión).

- Cojinetes: Permiten el movimiento relativo en uno o dos grados de libertad, limitándolo en los restantes, de forma que se minimice la pérdida de energía y el desgaste (Figura 1.1).



Figura 1.1 Cojinete esférico

- Rodamientos: Permiten el movimiento relativo entre dos elementos con centro de rotación común (Figura 1.2).



Figura 1.2 Rodamientos de bolas

De ellos, el rodamiento es el elemento que ocupa este proyecto. Los rodamientos no comenzaron a utilizarse con frecuencia hasta la revolución industrial, y sólo a partir del final de la Segunda Guerra Mundial comenzaron a estudiarse y producirse en masa, debido a la incapacidad de los constructores de crear rodamientos que pudiesen competir con los cojinetes hidrodinámicos. A modo de curiosidad, es reseñable el hecho de que Leonardo Da Vinci ideó un modelo de rodamiento que además incluía una rudimentaria jaula para mantener el espaciado de los elementos (Figura 1.3).

Inicialmente se preveía sólo que fuesen elementos para instalar en turbinas de alta velocidad para aeronaves, pero su evolución, características y estandarización extendieron su uso a prácticamente toda máquina que posea algún elemento que describa un movimiento rotatorio, abarcando un amplio espectro de tamaños, cargas y velocidades soportables y materiales de construcción.

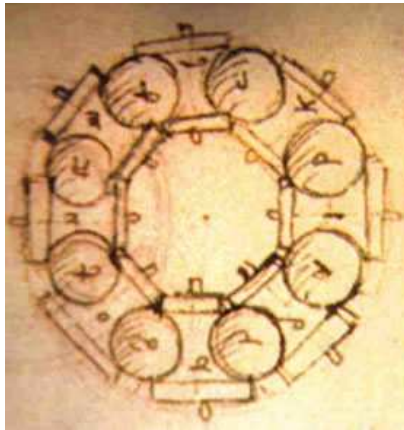


Figura 1.3 Croquis del modelo de rodamiento ideado por Leonardo da Vinci

El por qué del éxito de los rodamientos frente a otros sistemas de reducción del rozamiento puede explicarse mediante la enumeración de sus ventajas.

- Operan con una fricción mucho menor que los cojinetes hidrodinámicos, redundando en una menor pérdida de energía y menor aumento de temperatura por fricción, debido a que su funcionamiento se basa en un contacto de rodadura, menor que el de deslizamiento que presentan los cojinetes.
- El desplazamiento del rodamiento es menos sensible ante fluctuaciones de carga que el que se produce en los cojinetes.
- Requieren una pequeña cantidad de lubricante para un funcionamiento satisfactorio.
- Ocupan una menor longitud axial que los cojinetes.
- Pueden soportar cargas radiales y axiales simultáneamente, a diferencia de los cojinetes, que sólo pueden soportar cargas radiales.
- Existe una enorme variedad para amplios abanicos de fuerzas y velocidades.
- Su rendimiento y coeficiente de rozamiento es relativamente insensible a fluctuaciones de carga, velocidad y temperatura de funcionamiento.
- Existen tipos autoalineables.

Evidentemente, no todo son ventajas, y los rodamientos presentan algunos problemas que deben ser tenidos en cuenta.

- Necesarios acabados y tolerancias muy rígidos, así como un montaje muy preciso, lo cual los encarece.
- El montaje es más complejo.
- Son muy sensibles ante la suciedad, humedad, impactos...

Generalmente, los rodamientos suelen ser el “punto débil” de una máquina, marcando los períodos de revisión y mantenimiento, por ser elementos muy delicados. En condiciones de laboratorio, la vida de los rodamientos puede llegar a varias decenas de

años, pero son componentes que resultan muy vulnerables ante entornos sucios, desviaciones de los ejes o defectos, reduciéndose mucho su vida. De hecho, los rodamientos no suelen tener una vida útil más allá de un 10% de la indicada en el manual. Es por esto que conocer el comportamiento ante estas situaciones puede ser clave para estimar la degradación que sufren, pudiendo así anticiparse al fallo y evitar que éste extienda la avería al resto de componentes de la máquina. Para ello pueden utilizarse métodos teóricos, experimentales (análisis térmico, de vibraciones, ultrasonidos...) o de simulación, caso este último que ocupa el proyecto, con la finalidad de realizar un eficaz mantenimiento predictivo.

El mantenimiento predictivo es una filosofía que busca controlar unas ciertas variables clave que indiquen el estado en el que se encuentra el sistema, mediante su comparación con un estándar establecido, y con el que se obtiene el instante idóneo para llevar a cabo el mantenimiento. Además, el mantenimiento predictivo presenta una importante ventaja: la vida estimada puede ser calculada de forma relativamente precisa, pero estos cálculos no tienen en cuenta la posibilidad de fallos prematuros por manipulaciones incorrectas, lubricación inadecuada, sobrecargas, averías en otros elementos, cambios en el régimen de funcionamiento... El mantenimiento predictivo mostrará los comportamientos anómalos que no se esperan, o que se esperaba que apareciesen tras un tiempo determinado.

En resumen, el control de las variables clave permite efectuar el mantenimiento con la mayor eficiencia posible y al menor coste. La simulación puede ayudarnos a conocer dichas variables, permitiendo realizar un amplio número de experimentos a bajo coste, complementando así a los métodos experimentales, más costosos tanto en medios como en tiempo y dinero.

Existen numerosos programas que pueden realizar la simulación del comportamiento de los rodamientos. No obstante, el rodamiento es un elemento muy complejo, por lo que cada modelo normalmente tendrá unas limitaciones de uso y unas simplificaciones que harán más fácil su programación. Además, existen numerosas teorías con las que modelizar el comportamiento de los componentes, con lo cual el abanico de opciones es enorme y prácticamente podría existir un programa para simular unos pocos tipos de rodamientos. El caso que nos ocupa es el programa realizado con la tesis “Análisis y caracterización holista de un sistema rotativo complejo”, por José María Marín López.

1.2 Objetivos

El presente proyecto está ambientado en el diseño, evolución e implementación informática de modelos dinámicos de elementos mecánicos desarrollados por el grupo de investigación MAQLAB, de la Universidad Carlos III de Madrid.

Este proyecto es una revisión y evolución de los modelos matemáticos desarrollados en la tesis doctoral “Análisis y caracterización holista de un sistema rotativo complejo”, presentada por el Doctor D. José María Marín López, en la Universidad Carlos III de Madrid, en Julio de 2009, elaborada en el entorno de investigación del grupo MAQLAB.

El objetivo de dicha tesis era la modelización de un rodamiento de bolas mediante técnicas newtonianas y lagrangianas, incluyendo además la posibilidad de analizar casos en los que el rodamiento adoleciese de defectos. Se implementaban dos modelos de rodamiento para cada una de las técnicas: un modelo de 5 g.d.l. de 3 elementos rodantes, considerado como ideal, y un modelo de 11 g.d.l. de 9 elementos rodantes, considerados como modelo real. Esta modelización tiene como objeto simular el comportamiento del rodamiento: fuerzas de contacto elemento rodante-pista de rodadura, deformaciones de los elementos rodantes, evoluciones del centro del anillo interior...

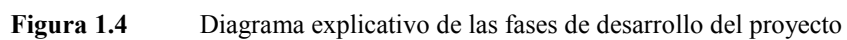
Este Proyecto Fin de Carrera no tiene un solo objetivo principal, sino tres:

- **La revisión y evolución de los modelos matemáticos de la dinámica de rodamientos, con y sin defecto, utilizando formulación de Newton y de Lagrange, desarrollados en la tesis doctoral antes mencionada, para la creación de nuevos modelo de simulación de rodamiento.**
- **Análisis de la sensibilidad de los principales parámetros mecánicos en la dinámica general de los diferentes modelos de rodamientos. Estudio de la estabilidad de los modelos.**
- **Desarrollo de una aplicación informática, implementada en Matlab, utilizando también sus herramientas Guide y Simulink, que permita introducir, de una manera sencilla, los diferentes valores de los parámetros del modelo y ofrezca un acceso total a todos los resultados posibles, dotando también a la aplicación de herramientas de procesamiento de la señal que faciliten el análisis de los resultados.**

1.3 Fases del desarrollo

Para la consecución del objetivo perseguido, se abordaron las siguientes fases:

- Se comenzó con una inspección visual del programa, comparando las ecuaciones reproducidas en los programas de simulación con las teóricas y buscando errores en la implementación de las mismas.
- Realización de simulaciones a los modelos con objeto de obtener resultados directos (fuerzas, deformaciones, posiciones, velocidades...) que permitan observar comportamientos anómalos o erróneos. Búsqueda de la correspondencia de dichos comportamientos anómalos con los errores de implementación de ecuaciones encontrados.
- Creación de programas auxiliares para el tratamiento de los resultados obtenidos: obtención de valores eficaces, tendencias seguidas por el modelo ante la variación de ciertos parámetros...



- 6

- Como colofón final, se crea un entorno visual para facilitar la introducción de datos para las simulaciones, la obtención de resultados y el tratamiento de los mismos.

1.4 Medios empleados

El elemento principal de trabajo es el programa Matlab, junto con dos de sus módulos: Simulink, utilizado para la creación y simulación de sistemas, y GUI, para la creación de entornos visuales de programas.

Matlab es la abreviatura de “MATrix LABoratory”, diseñado para realizar cálculos numéricos con matrices principalmente, escalares (reales y complejos), cadenas de caracteres y otras estructuras. Permite realizar labores de programación con un lenguaje propio de alto nivel, similar a C/C++ o Visual Basic, por citar algunos. El programa implementa el propio lenguaje de programación Matlab, además de las siguientes funciones:

- Funciones y constantes predefinidas para realización de tareas básicas, como las funciones trigonométricas, estadísticos, el número pi... a diferencia de otros lenguajes de programación en los que el usuario debe definir estas operaciones o constantes antes de poder usarlas.
- Biblioteca toolbox, con programas predefinidos para aplicaciones más complejas: transformadas, análisis de señales e imágenes...
- Para finalizar, Matlab dispone de un sitio web (www.mathworks.es; www.mathworks.com) en el que los usuarios de Matlab pueden compartir sus propios programas.

Viendo la extensión de funciones y programas disponibles, puede afirmarse sin miedo a equivocarse que pueden encontrarse aplicaciones para ayudar en la resolución de casi cualquier problema.

Es necesario comentar las pantallas principales, porque más tarde se hará referencia a alguna de ellas de manera puntual y es conveniente conocerlas, al menos superficialmente.

- Command Window (Ventana de comandos), donde se dan las órdenes al programa y se introducen las operaciones.
- Current Directory: indica el directorio actual en el que están situados los archivos que se están utilizando. Matlab no puede ejecutar archivos que no se encuentren en la carpeta que indica Current Directory, por lo que los programas relacionados deben estar todos en el mismo directorio, o hallarse correctamente referenciados en el código que se introduzca.
- Command History: Muestra una lista de los comandos introducidos por el usuario en la ventana de comandos, que permanece disponible hasta que es eliminada por el mismo.

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

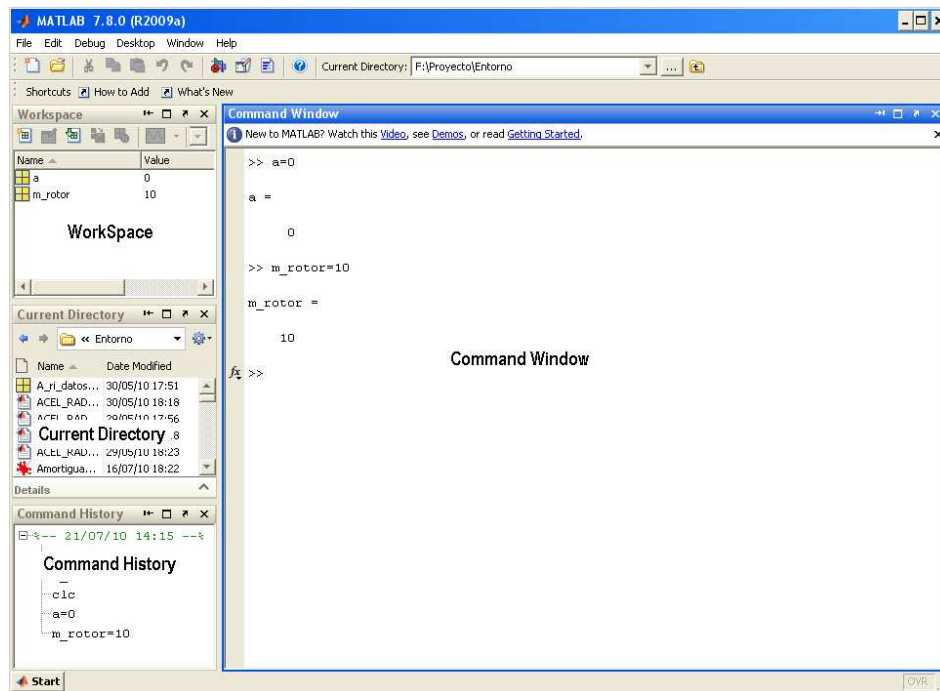


Figura 1.5 Pantalla principal de Matlab.

- **WorkSpace:** Los resultados calculados por el programa son almacenados en una parte de la memoria del ordenador conocida como WorkSpace. El que las variables o matrices definidas en la ventana de comandos se encuentren grabadas en él significa que están disponibles para ser utilizadas por Matlab cuando se ejecute un comando, archivo .m o programa que necesite de ellos. Todos los comandos ejecutados en la ventana de comandos comparten un WorkSpace común, pero dependiendo del tipo de funciones o módulos de Matlab que se estén utilizando, pueden existir varios WorkSpace.

Una de las principales propiedades de Matlab aparte de su capacidad de cálculo, es la posibilidad de interconexión con módulos de diversa índole: creadores de gráficos 2D y 3D, resolución de problemas de hidráulica, electricidad... pero el que es importante para este proyecto es uno de los principales: Simulink.

Simulink es un módulo de Matlab basado en la programación visual, diseñado para la simulación modelos de sistemas, capaz de trabajar con sistemas de ecuaciones diferenciales (lineales y no lineales) continuas y discretas, pudiéndose modelar sistemas continuos, discretos en el tiempo o híbridos.

El último de los módulos usados de Matlab es el creador de entornos visuales (GUI, Graphical User Interface), diseñado para generar una interfaz sencilla que facilite al usuario la utilización de los programas creados, haciendo el uso de los mismos más sencillo e intuitivo. Una interfaz GUI se compone de 3 objetos básicos:

- **Contenedores:** Son objetos que se utilizan para que sirvan de soporte a los componentes. Los más básicos son las pantallas, en las que se sitúa el resto de elementos, tanto otros contenedores como los componentes. También existen contenedores denominados paneles, que cumplen una función organizativa, pero

no tienen funcionalidad alguna, o los grupos de botones, utilizados para gestionar botones o selectores de una forma conjunta.

- Componentes: Son los elementos con los que interactúa el usuario, entre los que se encuentran los botones, los selectores, controles deslizantes, cuadros de texto...
- Eventos: Son las relaciones que existen entre el código fuente del programa y los componentes. Las acciones que el usuario realiza sobre los componentes (un *click* en un botón, escribir en un cuadro de texto con el teclado...) se transmiten al programa o segmento de programa al que se hallen ligados los componentes: ejecución o cierre del programa, inicialización de variables, generación de gráficas...

1.5 Estructura de la memoria

El documento consta de los siguientes capítulos:

- Capítulo 1: Presentación de los objetivos de la tesis, haciéndose una breve presentación de las características del elemento tratado y comentándose la importancia del conocimiento de las variables de control en el mantenimiento predictivo. Exposición y diagrama de la metodología seguida en el proyecto. Descripción de las herramientas utilizadas para la realización del proyecto. Breve descripción de la estructura de la memoria del proyecto.
- Capítulo 2: Vibraciones en máquinas y su aplicación al mantenimiento predictivo. Estudio teórico del análisis de la señal vibratoria, comentando particularidades de las señales vibratorias en el dominio del tiempo y de la frecuencia. Como herramientas imprescindibles para el análisis frecuencial, se expone la transformada de Fourier y la FFT, así como sus propiedades y aplicaciones. Desarrollo de la descripción de los fundamentos de algunas de las técnicas de análisis más aplicadas al tratamiento de las vibraciones generadas por defectos en rodamientos: demodulación (cálculo de la envolvente mediante la transformada de Hilbert), el Spike-Energy, el análisis Wavelet y el Espectrograma. Enumeración de modelos de vibraciones en sistemas mecánicos rotativos con rodamientos, prestando especial atención a los modelos de fallos localizados y a las fases de deterioro de los mismos.
- Capítulo 3: Análisis cinemático-dinámico de un rodamiento genérico y establecimiento de las condiciones iniciales que regirán y limitarán el problema complejo a uno más simple (modelo de 2 G.D.L.). Extensión de las condiciones para la generación de un modelo de $2 + Z$ G.D.L. y creación de 4 modelos, de 5 y 11 grados de libertad, regidos por las ecuaciones de Newton y Lagrange, incorporando más tarde los casos en los que el rodamiento presenta defecto.
- Capítulo 4: Implementación de las ecuaciones teóricas en entorno Matlab-Simulink. Diferencias entre modelos originales y definitivos. Descripción del programa de introducción de datos y diagramas de bloques representativos de las

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

ecuaciones. Entradas y salidas de los diagramas de bloques. Recopilación de aportaciones realizadas al programa: entorno visual, cálculo automático de parámetros dependientes, inclusión de elementos rodantes tipo rodillo.

- Capítulo 5: Simulaciones para la comprobación de la estabilidad- linealidad de los modelos y hallazgo de umbrales de utilización. Comparación con los modelos originales, con objeto de comprobar si las evoluciones realizadas son significativas y eficaces. Verificación del correcto funcionamiento del sistema: relación resultados teóricos- simulados y análisis frecuenciales a distintas velocidades de rotación.
- Capítulo 6: Manual del entorno visual. Capturas de pantalla y parámetros de cada una. Procedimientos para realizar las simulaciones, seguido de las opciones de tratamiento de resultados.
- Capítulo 7: Elaboración tras las simulaciones realizadas y las conclusiones parciales para cada apartado, de las conclusiones definitivas, resumiendo las aportaciones y mejoras realizadas sobre los modelos de partida. Proposición de trabajos y evoluciones futuras.
- Capítulo 8: Estimación del presupuesto del proyecto.
- Glosario. Pequeño resumen de los acrónimos y términos más utilizados a lo largo del proyecto.
- Referencias. Principales documentos bibliográficos y electrónicos consultados durante el proyecto.
- Anexos: Relación de gráficas de evaluación de estabilidad- linealidad. Código fuente del programa *compara_graf.m*.

Capítulo 2

Vibraciones mecánicas en máquinas rotativas

2.1 El fenómeno vibratorio en máquinas

Se entiende el movimiento vibratorio como el movimiento de un sistema, de manera oscilante o irregular, alrededor de una posición de equilibrio o referencia. Se supone además, que tales desplazamientos son relativamente pequeños y compatibles con las deformaciones elásticas dando origen a tensiones muy inferiores al límite elástico de los materiales.

Puede concebirse un sistema vibrante como el modelo idealizado de cualquier cuerpo o elemento de máquina que por las causas que sean, pueda entrar en vibración. Los sistemas generadores de vibraciones han de reproducir con la máxima exactitud el elemento real en vibración, caracterizado por la masa o matriz de inercia, la rigidez o matriz de rigidez, el amortiguamiento o matriz de amortiguamiento y los grados de libertad (de ahora en adelante *G.D.L.*) del sistema.

El análisis de vibraciones consiste en la captación sobre las partes externas de la máquina de señales vibratorias originadas durante el funcionamiento por anomalías internas. El análisis de estas señales permite obtener información sobre los procesos lentos de degradación. Los principios en que se basa el análisis de vibraciones son los siguientes:

CAPÍTULO 2: VIBRACIONES MECÁNICAS EN MÁQUINAS ROTATIVAS

- Toda máquina en funcionamiento, aunque esté en perfecto estado, presenta ruidos y vibraciones causados por pequeños defectos de fabricación, o por su relación con el entorno en el que se halla instalada. Este nivel vibratorio podría considerarse como el nivel característico de funcionamiento satisfactorio.
- Cualquier defecto en algún componente de la máquina, incluso en fase incipiente, lleva asociado un incremento del nivel vibratorio.
- Cada defecto lleva asociado unos cambios muy característicos en las vibraciones que produce, lo cual permite su identificación, es decir, un defecto consistente en una grieta profunda provoca vibraciones distintas a las de, por ejemplo, un defecto del tipo resalto.

Una vez obtenidas las señales de las vibraciones de una máquina donde se ha detectado un problema, es necesario identificar cuál es su causa y buscar la forma y el momento de reparación más eficiente, es decir, que corrija el fallo y, a la vez, el coste económico sea el mínimo posible: una parada programada para el mantenimiento siempre será un modo más eficiente de reparación que una parada en tiempo de trabajo. Los rodamientos, particularizando en el componente estudiado, son elementos extremadamente sensibles a cualquier tipo de anomalía, tales como suciedad, desalineamiento de ejes o defectos, por lo que los análisis de vibraciones son claves para detectar cuándo se está llegando al final de la vida útil del componente, y es hora de realizar el mantenimiento.

Al realizar los análisis de vibraciones, los resultados son visualizados de dos formas diferentes: la primera es hacerlo en el dominio temporal, en el cual se muestra la amplitud de la vibración respecto del tiempo; la segunda es transformar la vibración del dominio temporal a dominio frecuencial, que representa la amplitud de la vibración respecto a la frecuencia.

El dominio temporal nos da una idea física de la naturaleza de la vibración pero el dominio frecuencial es ideal para identificar las componentes frecuenciales características de la vibración (ruidos, defectos, armónicos del sistema...). El motivo se explica bien con un ejemplo:

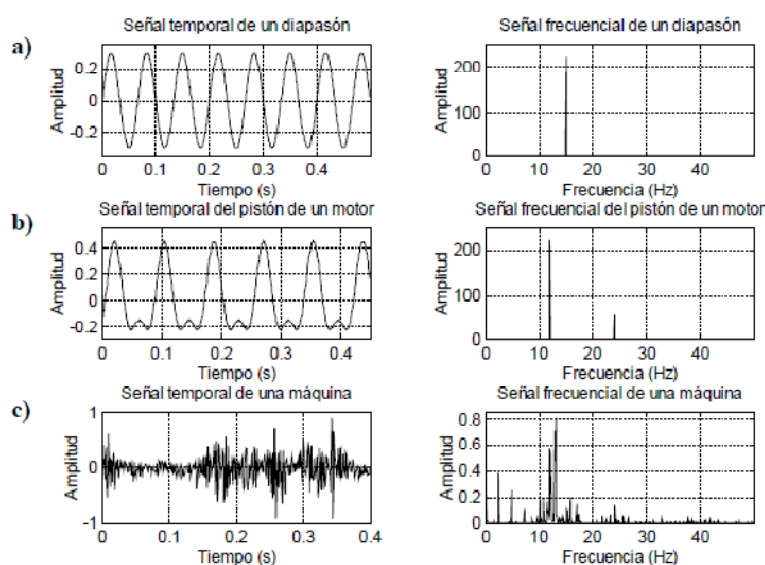


Figura 2.1. Señales temporales y espectros de frecuencia de distintos elementos.

2.1 EL FENÓMENO VIBRATORIO EN MÁQUINAS

En la Figura 2.1, se puede observar la señal vibratoria en el dominio del tiempo, y su correspondiente espectro de frecuencia, de un diapasón, del pistón de un motor y de una máquina compleja con varios elementos móviles. El movimiento vibratorio puede constar de un sólo componente a una determinada frecuencia como el diapasón, fácilmente identificable y calculable mediante visualización directa (Figura 2.2a); de dos componentes como el movimiento del pistón de un motor de combustión interna. El hecho de que la segunda componente de vibración tenga una frecuencia doble que la primera, puede hacer difícil su identificación por visualización directa, aunque todavía puede calcularse de manera sencilla, (Figura 2.2b). Pero las máquinas son sistemas muy complejos donde las vibraciones se componen de muchas señales con diferentes frecuencias, que además, dependiendo de en qué lugar se mida la vibración, puede incluir vibraciones procedentes de otros componentes de la máquina, por lo que un estudio de la relación amplitud-tiempo no basta para conocer cuántos componentes contiene la señal y de qué frecuencias (Figura 2.2c). Una vez se pasa a dominio de frecuencias, los datos se plasman en un espectrograma o espectro de frecuencia, que es el gráfico que representa los niveles de vibración en función de la frecuencia.

Un defecto puede identificarse al comparar las amplitudes de las vibraciones tomadas. Normalmente, una máquina que funciona correctamente tiene valores que suelen seguir una línea con tendencia ligeramente ascendente o constante. Cuando en algún momento los valores aumentan o la tendencia asciende de una forma inesperada, se puede pensar en la presencia de algún defecto.

Generalmente, los valores de amplitud que se comparan son los de velocidad o aceleración (normativa de vibraciones en máquinas), usando raras ocasiones el desplazamiento. Una vez se ha observado que la amplitud de la vibración ha aumentado de una forma inesperada, es importante comparar los valores de la energía de la señal vibratoria. El conjunto de estos valores indicará la gravedad del problema. Así, un fallo puede detectarse al encontrar una tendencia de la amplitud de velocidad ascendente, de forma imprevista, y unos valores del parámetro "g" altos. También es posible que, existiendo un problema, haya valores de Spike- Energy altos y, de repente, disminuyan y poco a poco aumenten, esto puede dar lugar a un fallo total, donde la máquina deje de funcionar. Valores altos de Spike-Energy pueden ser indicadores, en la mayor parte de los casos, de problemas de rodamientos, engranajes, acoplamientos y, en los casos más extraños, de problemas hidráulicos.

El análisis de las señales vibratorias puede indicar el tipo de defecto existente pero en muy pocas ocasiones aparece un único defecto. La experiencia y el conocimiento de la máquina son dos factores fundamentales a la hora de identificar la causa que produce una vibración y en su caso, el elemento dañado que menor vida remanente presente, provocando el fallo y originando la parada de la máquina.

Generalmente, la causa de la vibración reside en problemas mecánicos como son: desequilibrio de elementos rotativos, árboles o ejes doblados, desalineación en acoplamientos, engranajes desgastados o dañados, rodamientos deteriorados, fuerzas aerodinámicas o hidráulicas, resonancias, etc.

Con el análisis frecuencial se pueden identificar fuentes de vibraciones no deseadas, como desalineamiento, desequilibrios, defectos en engranajes o cojinetes, problemas eléctricos, etc. El movimiento de los componentes junto a sus características geométricas ocasiona un aumento de amplitud de frecuencias características cuando existe fallo o

CAPÍTULO 2: VIBRACIONES MECÁNICAS EN MÁQUINAS ROTATIVAS

deterioro, pudiendo relacionar y como consecuencia identificar el defecto observando el espectrograma.

El dominio temporal da una perspectiva natural de la vibración, con sentido físico. Es especialmente útil cuando se analizan señales impulsivas de fallos en rodamientos y engranajes. El dominio temporal también es útil para analizar las relaciones de fase de la vibración. A continuación, ilustrando el tema que ocupa este proyecto, se muestran dos momentos diferentes en una prueba de funcionamiento para rodamientos:

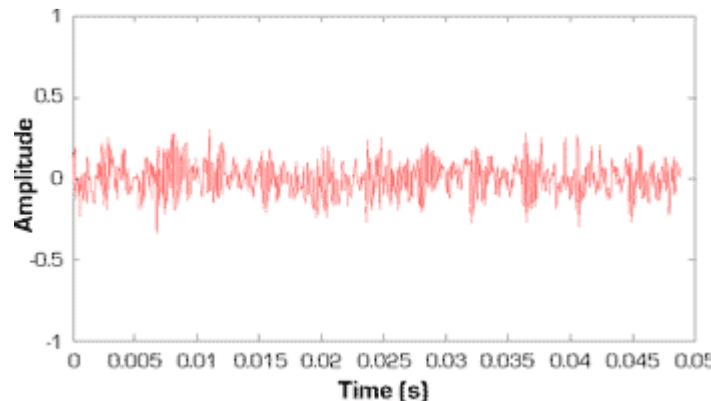


Figura 2.2. Señal temporal de un rodamiento con defecto en pista exterior en su primera fase.

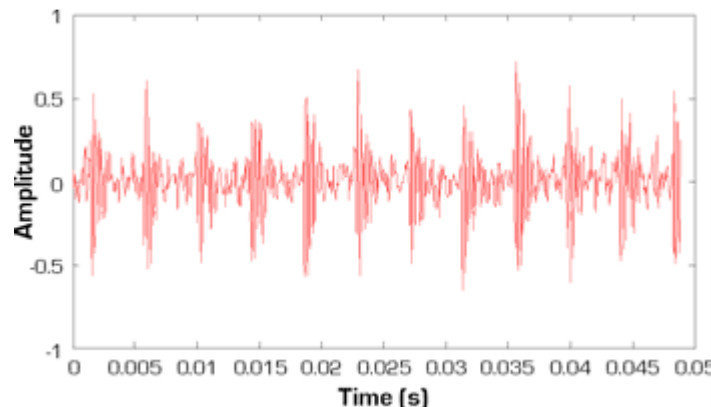


Figura 2.3. Señal temporal de un rodamiento con defecto en pista exterior en estado avanzado de deterioro.

Las dos señales están tomadas con una diferencia de 3 días. En el rodamiento se origina un defecto en la pista exterior, que queda enmascarado en la primera imagen por el ruido de la señal y por estar en fase incipiente. Sin embargo, en la segunda pueden apreciarse claramente los impactos sufridos por los elementos rodantes con el defecto. Si se obtuviese el espectro de frecuencias de las dos señales, los picos se verían en posiciones similares, y aunque habría diferencia de magnitud entre ellos, esta similitud podría inducir a un diagnóstico erróneo, ya que en el primer caso es evidente que el defecto aún no causa problemas.

El objeto del análisis en frecuencia es descomponer una señal compleja (como las vibraciones mecánicas) en componentes más elementales que permitan un estudio más sencillo. La representación de una señal vibratoria en el dominio de la frecuencia es conocida como el espectro de frecuencia. El espectro de frecuencia de una señal vibratoria define completamente la vibración y no se pierde información. El análisis de

las vibraciones en el dominio de la frecuencia agrupa las técnicas más potentes y por tanto las más utilizadas para la detección y el diagnóstico de fallos en máquinas.

Para descomponer una función periódica de una variable es posible escoger diferentes grupos de funciones ortonormales, es decir, diferentes bases del espacio vectorial de dimensión infinita, en el cual se define un producto de escalas de las funciones periódicas. La elección viene influida por el tipo de señales que se manejen; en el caso particular de sistemas mecánicos rotativos, las señales senoidales están asociadas a la naturaleza de los procesos mecánicos cíclicos. Por esto, se utiliza como herramienta la descomposición por series trigonométricas de Fourier.

El estudio de las vibraciones en el dominio de la frecuencia es equivalente al estudio en el dominio temporal, pero para señales muy complejas. El dominio temporal es incapaz de dar una información rápidamente analizable, mientras que el análisis en el dominio de la frecuencia indica su composición espectral tanto en amplitudes como en fases, aunque ambos tienen sus limitaciones y deben ser utilizados de forma complementaria.

Las primeras aplicaciones industriales del análisis en el dominio de la frecuencia fueron los analizadores de espectros analógicos (sintonización de frecuencias mediante filtros pasabanda), pero la utilización del algoritmo de la FFT (transformada rápida de Fourier) en el análisis de la señal de vibración por computador ha hecho que se impongan los analizadores digitales que usan el algoritmo de la FFT.

La importancia de estas técnicas dio pie a numerosos estudios, tanto sobre la forma de realizar dicha transformación como sobre los diferentes métodos de análisis y las relaciones entre los resultados del citado estudio y los fallos característicos de las máquinas.

En este apartado se expondrán de forma resumida algunas de las técnicas más importantes y otros conceptos de interés relacionados con este tipo de análisis y que posteriormente serán aplicados a la investigación objeto de este trabajo.

2.2 Tratamiento de señales

2.2.1 La transformada de Fourier

Cuando registramos una señal vibratoria, ésta se encuentra en el dominio del tiempo y como se ha comentado antes, puede ser interesante (o conveniente) para su análisis el tenerla en el dominio de la frecuencia.

La herramienta utilizada para pasar del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia es el desarrollo en serie de Fourier. El nombre de desarrollo en serie de Fourier se debe al físico francés Jean Baptiste Fourier (1768-1830) que fue el primero en sugerir que cualquier señal periódica se podía representar como una suma de sinusoides.

CAPÍTULO 2: VIBRACIONES MECÁNICAS EN MÁQUINAS ROTATIVAS

Una señal es periódica si existe algún valor positivo T tal que:

$$x(t) = x(t + nT) \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

El valor de T para el que se verifica la ecuación 2.1 se denomina periodo fundamental y el valor $2\pi/T$ se denomina frecuencia angular fundamental, que denotamos con ω_0 . Una señal temporal $x(t)$ de periodo T puede expresarse como:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos \frac{2\pi \cdot k \cdot t}{T} + b_k \cdot \sen \frac{2\pi \cdot k \cdot t}{T}) \quad (2.2)$$

Donde:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot \cos \frac{2\pi \cdot k \cdot t}{T} dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot \sen \frac{2\pi \cdot k \cdot t}{T} dt$$

Con $k \geq 1$

Las denominadas condiciones de Dirichlet garantizan que la serie que representa la ecuación 2.2 sea igual a $x(t)$ salvo aquellos puntos donde $x(t)$ es discontinua. Las condiciones de Dirichlet son:

- La señal $x(t)$ tiene un número finito de discontinuidades en cualquier periodo.
- La señal $x(t)$ tiene un número finito de máximos y mínimos en cualquier periodo
- La señal $x(t)$ es absolutamente integrable:

$$\int_T |x(t)| \cdot dt < \infty$$

Si además tenemos en cuenta que:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \cdot \sen(\theta)$$

Es posible escribir la transformada de Fourier $X(f)$ de una función $x(t)$ de forma compleja, según muestra la ecuación 2.3:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-i2\pi f t} df \quad (2.3)$$

La Transformada Inversa de Fourier viene dada por la ecuación 2.4:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot e^{i2\pi f t} df \quad (2.4)$$

La mayoría de las señales de interés práctico son analógicas. Para procesar estas señales analógicas por medios digitales es necesario convertirlas a formato digital, esto es, convertirlas en una secuencia de números de precisión finita. Este proceso pasa por un muestreo de la señal.

El muestreo es la conversión de una señal en tiempo continuo a una señal en tiempo discreta tomando muestras de la misma cada cierto periodo de tiempo o intervalo de muestreo Δ a lo largo de un periodo de tiempo T , siendo N el número de muestras obtenidas de forma que $T = N \cdot \Delta$.

Ya no existe una señal continua $x(t)$, sino una serie finita de N elementos x_r que evidentemente no abarca de $-\infty$ a ∞ por tanto, es necesario una modificación de la ecuación 2.3, resultando la Transformada Discreta de Fourier (DFT Discrete Fourier Transform), y viene dada por la ecuación

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} (x_r \cdot e^{\frac{-i2\pi kr}{N}}) \quad k = 0, 1, 2, \dots, (N-1) \quad (2.5)$$

Siendo la Transformada Discreta de Fourier Inversa (IDFT, Inverse DFT)

$$x_r = \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot e^{\frac{-i2\pi kr}{N}} \quad k = 0, 1, 2, \dots, (N-1) \quad (2.6)$$

La Figura 2.4 muestra los pasos necesarios para obtener la DFT de la señal $x(t)$. Las figuras de la izquierda corresponden a las funciones en el dominio del tiempo y las de la derecha corresponden a sus transformadas de Fourier.

La Figura 2.4 (a) muestra una señal analógica que se multiplica por un tren de impulsos mostrado en la Figura 2.4 (b) resultando la señal muestreada de la 2.4 (c). Como puede apreciarse, la transformada de Fourier de un tren de impulsos es otro tren de impulsos.

El espectro de la señal muestreada es la convolución de las funciones en el dominio de la frecuencia que se muestran en las Figuras 2.5 (a) y (b), como se muestra en la Figura 2.4 (c). Por tanto, el espectro de la señal muestreada es la repetición periódica del espectro de la señal 2.4 (a).

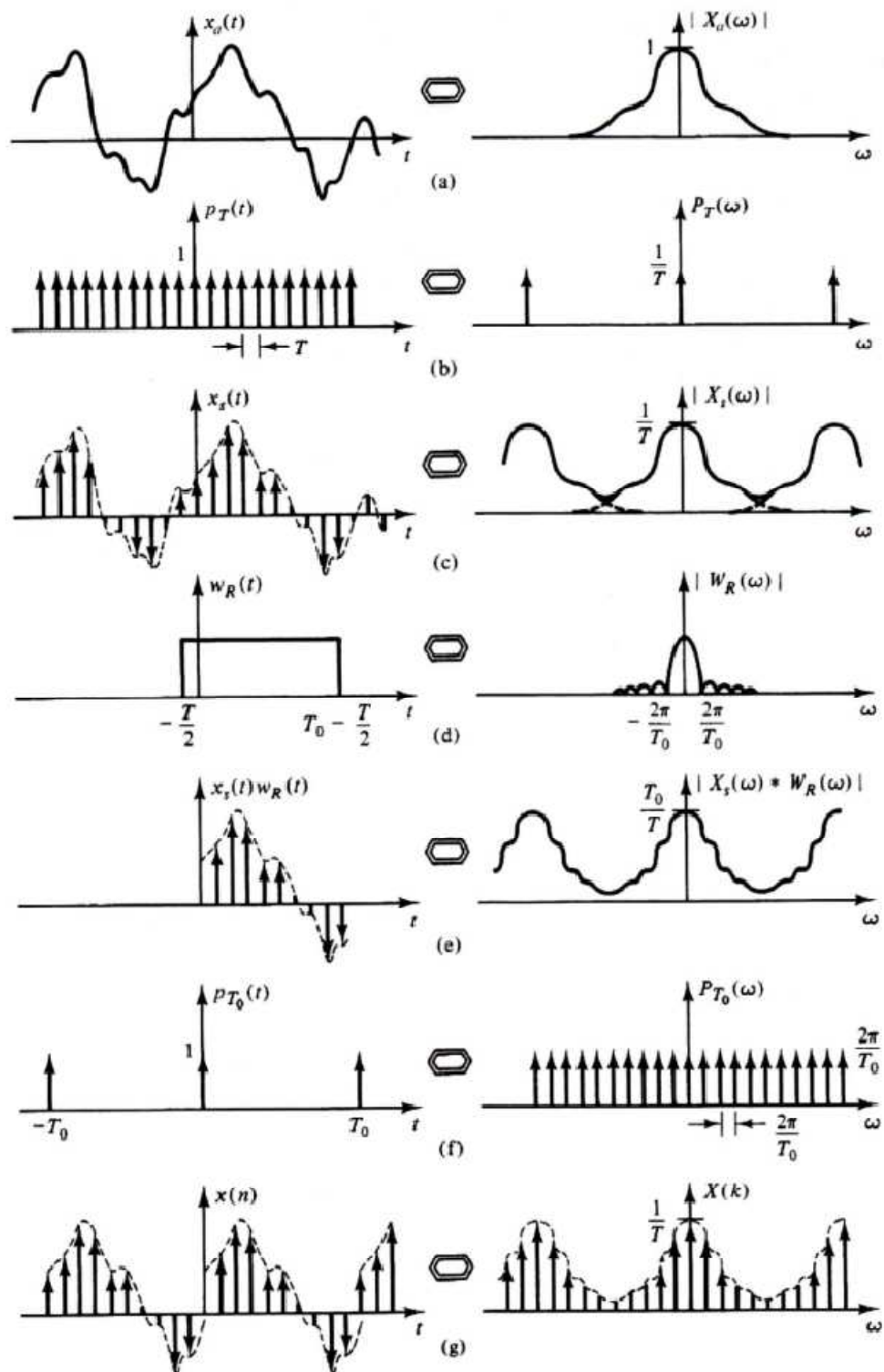


Figura 2.4. Transformada discreta de Fourier de una señal analógica.

Expuestas las transformadas de Fourier continuas y discretas hay que mencionar que aunque el proceso normal es comenzar haciendo una estimación de la función de correlación correspondiente y, posteriormente, obtener su transformada de Fourier, esto no se realiza así, ya que se dispone de la Transformada Rápida de Fourier (FFT, Fast

Fourier Transform) que permite de una manera más rápida y precisa, obtener la estimación espectral directamente de las muestras de la señal temporal.

La transformada rápida de Fourier, FFT, fue introducida por Cooley y Tukey en 1965. El mecanismo básico de la FFT consiste en dividir la serie completa x_r en sucesiones más cortas, por lo que no calcula la DFT de la serie original completa sino de otras más cortas. El proceso se repite sucesivamente hasta que las últimas contengan cada una un sólo término. Finalmente se combinan entre sí con el consiguiente ahorro operacional. A la vista del proceso, es evidente que para que pueda realizarse las operaciones, se debe coger una serie original x_r que tenga un número de elementos potencia de 2 ($2n$), debido a que este proceso es la FFT de base 2. También podría realizarse para otras bases, pero su programación es más complicada y, además, la posibilidad de prolongar artificialmente la sucesión por adición de ceros no representa ningún problema en el caso de base 2.

Con el método de cálculo de la FFT se reduce notablemente el número de operaciones a realizar. Mediante la DFT había que realizar N multiplicaciones de la forma $x_k \cdot e^{-i2\pi kr/N}$ para cada uno de los N valores de X_k , lo cual conllevaba a realizar un total de N^2 multiplicaciones. Sin embargo, con la FFT se reduce este valor a, aproximadamente, $N \cdot \log_2 N$, lo que lleva a una reducción tal como se ofrece en la Tabla 2.1.

Tabla 2.1. Reducción del número de operaciones de la FFT respecto a la DFT.

Número de elementos N	Relación DFT- FFT $\frac{N^2}{N \cdot \log_2 N}$
4	2
16	4
64	10.7
256	32
1024	102.4
4096	341.3
16384	1170.3

Se presentan una serie de limitaciones y distorsiones en el análisis debidas al muestreo de la señal. La frecuencia de muestreo $f_s = 1/\Delta$ limita la frecuencia máxima que se puede analizar, mientras que el periodo total muestreado determina la resolución en el dominio de la frecuencia Δf y por tanto, la frecuencia inferior f_l . Puesto que el número de puntos es fijo, habrá que evaluar si se quiere mayor precisión a bajas frecuencias o a altas frecuencias.

'Aliasing' o efecto del solapamiento

Sea $x(t)$ una señal que no tiene componentes con frecuencia mayor de f_{max} . El teorema del muestreo afirma que $x(t)$ queda completamente determinada por sus valores tomados cada Δ segundos si se cumple que $\Delta = 1/f_{max}$. Este teorema además nos permite reconstruir completamente una señal a partir de sus muestras tomadas con una frecuencia de muestreo de $f_s = 1/\Delta$ siempre que se cumpla que $f_s \geq 2f_{max}$, es decir, dos veces la frecuencia mayor presente en la señal. La mínima frecuencia de muestreo se denomina frecuencia de Nyquist.

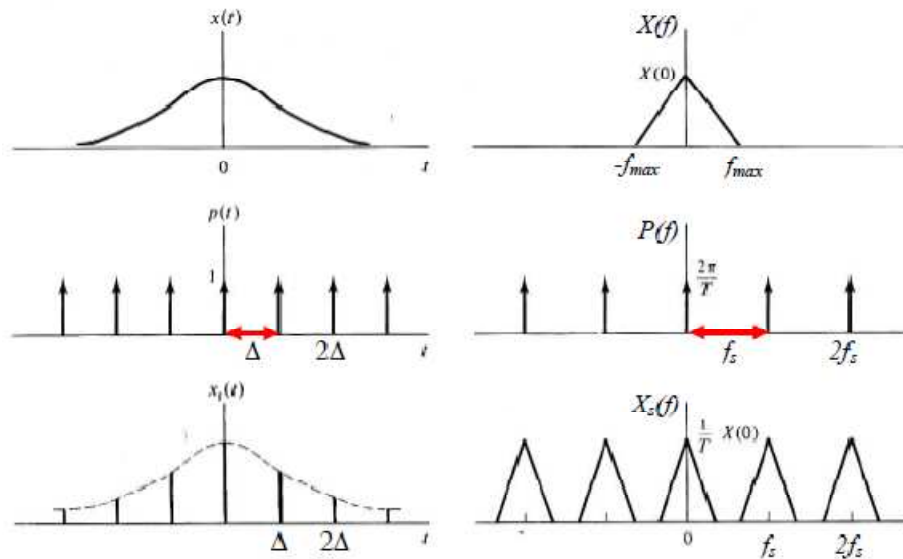


Figura 2.5. Representación espectral de la señal muestreada.

El espectro de la señal muestreada, Figura 2.5, se obtiene como convolución del espectro de la señal $x(t)$ y el espectro del tren de impulsos $p(t)$, por tanto, consiste en la repetición periódica de $X(f)$ cada f_s Hz.

Si la frecuencia de muestreo f_s se reduce, los espectros se solapan, como muestra la Figura 2.6. Cuando esto sucede, no podrá recuperarse la señal original a partir de la señal muestreada, apareciendo en el espectrograma unas frecuencias que no forman parte de la señal original.

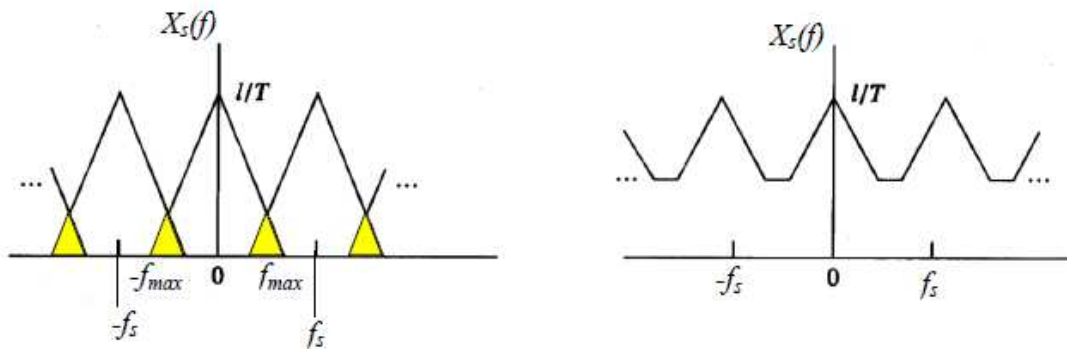


Figura 2.6. Espectro generado al reducir la frecuencia de muestreo.

Evitar este fenómeno es de vital importancia, ya que la distorsión de solapamiento hará que el espectro resultante difiera del real, si existen frecuencias superiores, por ello, en ocasiones, puede ser necesario filtrar la serie temporal para eliminar todas las frecuencias superiores a $1/2\Delta t$ y así estar seguros de que los resultados son correctos.

A pesar de evitar el efecto del solapamiento, el criterio de Nyquist no es del todo adecuado ya que tomar una muestra de dos puntos por longitud de onda para la frecuencia superior no nos proporciona una buena calidad, siendo una pobre representación de la realidad, por lo que normalmente, en los analizadores comerciales, se utiliza el criterio:

$$f_o < \frac{1}{3 \cdot \Delta t}$$

Efecto ventana o 'leakage'

Cuando se utiliza la FFT se presupone que el registro del tiempo se repite periódicamente fuera del tiempo representado en él. Esto es cierto si la señal contenida en el registro contiene un número entero de ciclos, es decir, la señal es periódica en el tiempo de registro. Sin embargo, si la señal no cumple esta condición, se estará suponiendo una señal que puede ser muy diferente a la original.

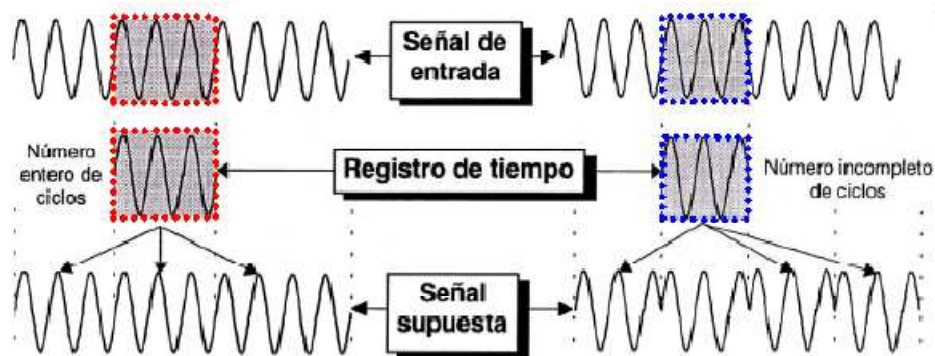


Figura 2.7. Efecto 'leakage'.

Este es un problema que puede llegar a ser muy importante, ya que puede alterar el resultado de la FFT. Este problema se puede paliar utilizando una función denominada ventana espectral. Como el problema fundamental de la falta de periodicidad se encuentra en los extremos, se busca en estas funciones que la influencia de los extremos sea despreciable, dando preponderancia a la zona central del registro.

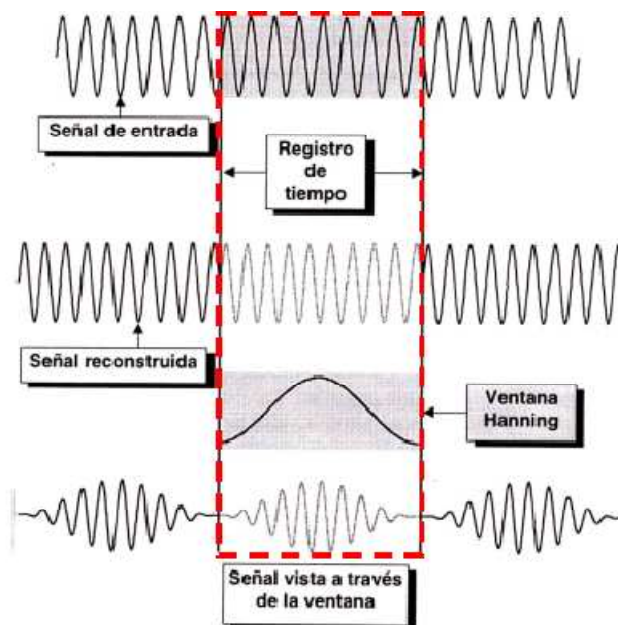


Figura 2.8. Aplicación de la ventana temporal a una señal.

Existen muchos tipos de ventana, cada una de las cuales tiene una aplicación restringida. Algunas de ellas son:

- La ventana uniforme. Se aplica en los casos donde la señal no es periódica y por tanto, no hay que forzarla a ello, tal es el caso de los transitorios.

- La ventana Hanning. Se aplica cuando la señal no es periódica en el registro de tiempo y hay que forzarla a ello. Los resultados obtenidos son buenos en la frecuencia pero introduce un cierto grado de atenuación en la amplitud.
- La ventana Flattop. Se aplica de igual forma cuando la señal no es periódica en el registro de tiempo y hay que forzarla a ello. Los resultados obtenidos son buenos en la amplitud pero presenta peores resultados en la frecuencia.

La Tabla 2.2 muestra algunas de las ventanas más comunes y sus características.

Tabla 2.2. Propiedades espectrales de algunas señales temporales.

Tipo de ventana	Lóbulo más alto (dB)	Ancho de banda ($x1/T$)	Caída asintótica (dB/década)	Máxima amplitud del error (dB)
Rectangular	-13.4	1.00	-20	3.9
Bartlett	-26	1.25	-40	-
Hanning	-32	1.50	-60	1.4
Hamming	-43	1.36	-20	1.8
Kaiser-Bessel	-69	1.80	-20	1.0
Gaussiana	-69	1.90	-20	0.9
Flattop	-93	3.70	0	<0.1

Efecto empalizada o 'Picket-Fence'

Como el espectro es calculado a frecuencias discretas, la amplitud y frecuencia real de las componentes puede perderse tal como muestra la Figura 2.5. Esto se soluciona mejorando la resolución en frecuencia ya sea un mayor número de líneas o una frecuencia máxima de menor valor.

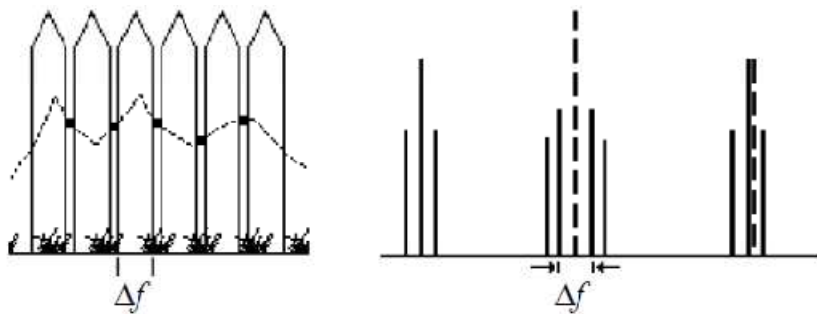


Figura 2.9. Efecto 'Picket-Fence'

2.2.2 PSD y potencia espectral

La Densidad de Potencia Espectral (Power Spectral Density, PSD) de una señal es una función matemática que nos informa de cómo está distribuida la potencia o la energía de dicha señal sobre las distintas frecuencias que la componen (su espectro). Para poder realizar un mejor análisis espectral, tras obtener los valores X_k aplicando la FFT, se muestra la densidad de potencia espectral (PSD).

Supongamos que x_n representa un voltaje. La potencia disipada sobre una resistencia de valor R , vale:

$$P_n = x_n^2/R$$

Si el valor de esta resistencia es de $R = 1$ ohmio, la potencia media disipada durante un periodo de tiempo T , viene dada por la ecuación 2.7

$$P_{media} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2 \Delta}{T} \quad (2.7)$$

Donde la longitud total de la señal $T = N \cdot \Delta$, siendo N el número de muestras. Por tanto:

$$P_{media} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2}{N} \quad (2.8)$$

Teniendo en cuenta el teorema de Parseval para la DFT:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2 = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} |X_k|^2$$

Poner la ecuación 2.8 como:

$$P_{media} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} |X_k|^2}{N^2}$$

En el dominio de la frecuencia, la potencia media puede obtenerse mediante la ecuación

$$P_{media} = \sum_{k=0}^{N-1} S(f)_k \cdot \Delta f \quad (2.9)$$

Donde $S(f)_k$ es la densidad de potencia espectral de la frecuencia k .

Combinando las ecuaciones 2.8 y 2.9, resulta:

$$\frac{|X_k|^2}{N^2} = S(f)_k \cdot \frac{1}{N \cdot \Delta} \quad (2.10)$$

Quedando finalmente que la densidad de potencia espectral para cada frecuencia vale:

$$S(f)_k = \frac{\Delta \cdot |X_k|^2}{N} = \frac{\Delta}{N} \cdot X_k \cdot X_k^*$$

2.2.3 Envolvente y espectro de la envolvente

El análisis del espectro de la envolvente se ha convertido en una de las técnicas más utilizadas para detectar anomalías en los rodamientos. La técnica utilizada para la detección de defectos en elementos rodantes era examinar la vibración de baja frecuencia (generalmente inferiores a 500 Hz) en el espectrograma y examinar la presencia (o no) de

CAPÍTULO 2: VIBRACIONES MECÁNICAS EN MÁQUINAS ROTATIVAS

las frecuencias de defecto. Estas frecuencias de fallo se calculan a partir de la geometría del rodamiento y de la velocidad de rotación del anillo interno y anillo externo.

El diagnóstico consistía simplemente en calcular las frecuencias de defecto y luego supervisar el espectrograma de la señal de vibración hasta que estas frecuencias aparecieran. Pero no siempre se conseguía reconocer un rodamiento defectuoso, en muchas ocasiones, la visión del espectrograma no era suficiente para identificar el problema.

En 1971, Huntsville con la NASA, apoyó un programa para investigar la detección de defectos en rodamientos, demostrando que la técnica utilizada hasta entonces no era capaz de detectar rodamientos defectuosos cuando estos se encontraban en su fase incipiente.

Para investigar este fenómeno, se practicó un pequeño defecto en la pista de rodadura del anillo interno en un rodamiento, se colocó en un banco de ensayos de rodamientos donde se captó por medio de distintos sensores: la señal de vibración generada por este rodamiento defectuoso, la señal acústica, el par de accionamiento y la temperatura. Tras analizar detenidamente todas las señales obtenidas, ninguna de ellas mostraba la presencia del defecto. La Figura 2.10 muestra la diferencia de los espectros de la señal de vibración de un rodamiento nuevo y el rodamiento defectuoso ensayado.

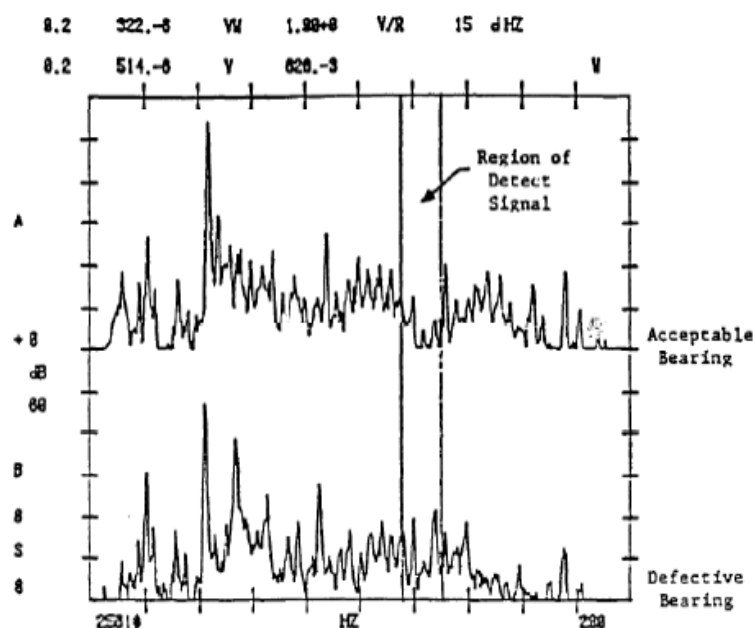


Figura 2.10. Comparación de un espectro de vibración de un rodamiento nuevo y defectuoso.

Un día decidieron colocar un osciloscopio para observar la señal temporal directamente (Figura 2.11).

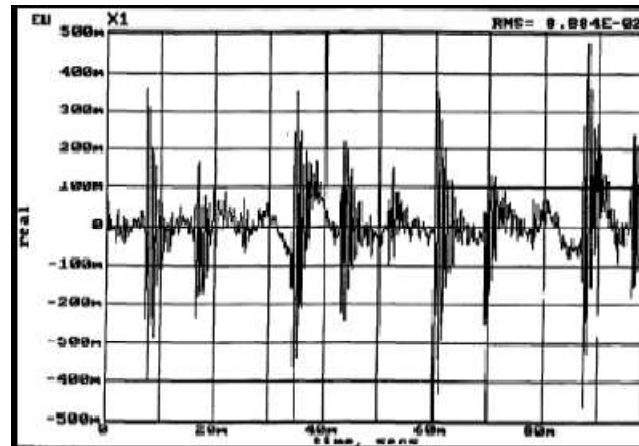


Figura 2.11. Señal temporal del rodamiento defectuoso.

El tiempo fue medido entre las señales de impacto y cuando fue convertido a frecuencia, se obtuvo el valor de la frecuencia de defecto para un rodamiento con defecto de pista interna. Si pudiera ser dibujada una línea alrededor de la señal como muestra la Figura 2.12, entonces el espectro de esta nueva señal (envolvente), debería mostrar la frecuencia de defecto. Para obtener la envolvente de la señal, utilizaron un demodulador similar a aquellos usados en la detección de las ondas de radio de amplitud modulada.

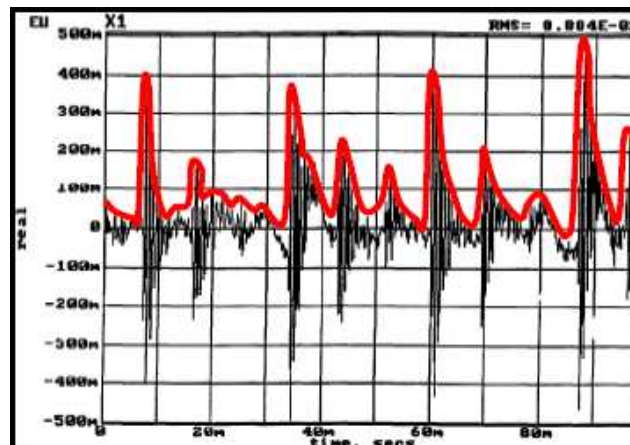


Figura 2.12. Envolvente de la señal temporal del rodamiento defectuoso.

La Figura 2.13 muestra el espectro de la envolvente.

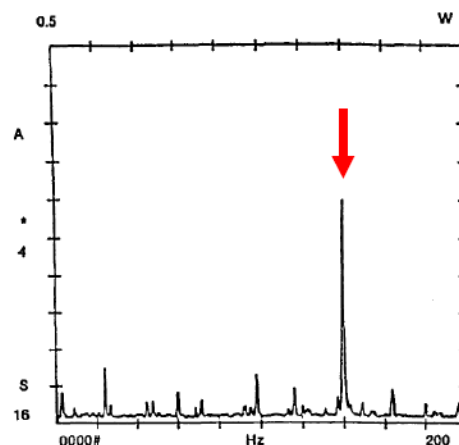


Figura 2.13. Espectro de la envolvente de la señal temporal del rodamiento defectuoso.

CAPÍTULO 2: VIBRACIONES MECÁNICAS EN MÁQUINAS ROTATIVAS

La señal de defecto, marcada con una flecha roja, es ahora claramente evidente con una amplitud muy buena a la frecuencia de defecto.

El estudio de la vibración en alta frecuencia y el análisis de la envolvente fueron descubiertos casi por casualidad en este programa. Mediante ese trabajo demostraron que el análisis directo del espectro a baja frecuencia para la señal de defecto es mucho menos sensible que el análisis del espectro de la envolvente.

El análisis de la envolvente o análisis por demodulación se realiza según una secuencia de acciones que pasamos a detallar (Figura 2.14):

- Captar la señal y aplicar un filtro paso alto para eliminar señales como desequilibrios, ruido eléctrico (50 Hz), etc.
- Seguidamente se rectifica la señal y se elimina la componente continua que pudiera presentar la onda.
- Por medio de un detector de envolvente, extraer la señal moduladora que es la que nos interesa.
- A continuación se obtiene el espectro de la envolvente.

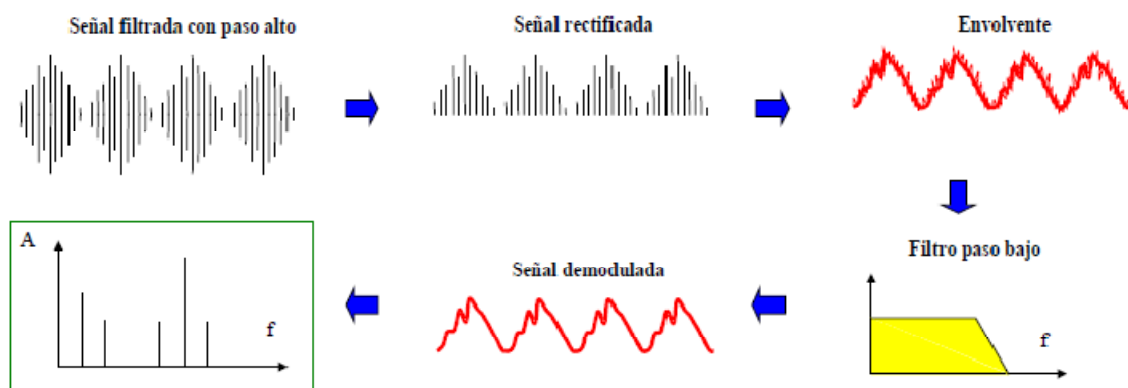


Figura 2.14. Proceso de demodulación.

Este método de demodulación presenta algunos inconvenientes causados por el uso del filtro paso bajo, ya que este causa un efecto de promediado que alisa o rebaja los picos en la señal demodulada. Para eliminar estos errores e imperfecciones, se extiende el uso de la transformada de Hilbert para extraer la envolvente de una señal.

Proceso de demodulación

En primer lugar se debe recordar que una señal modulada puede ser representada como la parte real de una señal analítica:

$$g(t) = A(t) \cdot e^{j\phi(t)}$$

donde $A(t)$ representa la función de la modulación de amplitud de la señal (más un componente directo en continua DC) y $\Phi(t)$ representa la función de la modulación de frecuencia de la señal (más la componente de la frecuencia transportadora f_0).

Una señal $x(t)$ puede ser demodulada mediante el proceso de transformada de Hilbert, expuesto a continuación:

1. Se calcula la transformada de Hilbert de la función dada $x(t)$. El valor de la transformada de Hilbert de $x(t)$ se denotará por $\tilde{x}(t)$.
2. Se forma la señal analítica:

$$z(t) = x(t) + j \cdot \tilde{x}(t)$$

3. Se descompone la señal analítica en su amplitud y en su fase: $z(t) = A(t) \cdot e^{j\phi(t)}$. La fase de la señal analítica de modulación será:

$$\phi(t) = 2\pi \cdot f_0 \cdot t + \beta \cdot \text{sen}(2\pi \cdot f_m \cdot t)$$

donde f_0 será la frecuencia de la onda transportadora; β será la máxima desviación de fase alrededor de f_0 , y f_m es la frecuencia moduladora.

4. El factor exponencial se multiplica por $e^{-j \cdot 2\pi \cdot f_0 \cdot t}$, es decir:

$$e^{j\phi(t)} \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot f_0 \cdot t}$$

para extraer la componente de frecuencia transportadora f_0 y, así, la función de fase resultante será la señal de modulación de fase $\Phi_m(t)$ que se buscaba. Dicha señal de modulación de fase $\Phi_m(t)$ será:

$$\phi_m(t) = \beta \cdot \text{sen}(2\pi \cdot f_m \cdot t)$$

5. Finalmente, se calcula $\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d}{dt} \phi_m(t)$, esto es:

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d}{dt} \phi_m(t) = \beta \cdot f_m \cdot \cos(2\pi \cdot f_m \cdot t)$$

para poder obtener el valor de la señal de modulación de frecuencia, f_m .

La transformada de Hilbert

La Transformada de Hilbert, en términos generales, puede ser definida de tres maneras distintas:

- Como integral de convolución.
- Como sistema de cambio de fase de $\pi/2$.
- Como parte imaginaria de una señal analítica.

A continuación se presentan los detalles de cada una de estas formas.

1. Definición como integral de convolución

La transformada de Hilbert de una función de valores reales $x(t)$ en el rango $-\infty < t < \infty$ es una función de valores reales $\tilde{x}(t)$ definida como:

$$\tilde{x}(t) = H[x(t)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(u) \frac{1}{t-u} du$$

CAPÍTULO 2: VIBRACIONES MECÁNICAS EN MÁQUINAS ROTATIVAS

Es decir, $\tilde{x}(t)$ es la integral de convolución de $x(t)$ y $(1/\pi \cdot t)$, lo cual puede expresarse como:

De manera semejante a lo expuesto, se podría expresar la transformada inversa de Hilbert como:

$$x(t) = H^{-1}[\tilde{x}(t)] = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(u) \frac{1}{t-u} du$$

2. Definición como sistema de cambio de fase de $\pi/2$.

Si $\tilde{X}(f)$ es la transformada de Fourier de $\tilde{x}(t)$, se cumplirá que:

$$\tilde{X}(f) = F[\tilde{x}(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(t) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot f \cdot t} dt$$

Entonces, considerando que $X(f)$ es la transformada de Fourier de $x(t)$ y además:

$$\tilde{x}(t) = x(t) * \left(\frac{1}{\pi \cdot t}\right)$$

se puede afirmar que $\tilde{X}(f)$ es el resultado de multiplicar $X(f)$ por la transformada de Fourier de $(1/\pi \cdot t)$ siendo esta igual a:

$$F\left[\frac{1}{\pi \cdot t}\right] = -j \cdot \text{sgn}f = \begin{cases} -j & f > 0 \\ j & f < 0 \\ 0 & f = 0 \end{cases}$$

De todo lo expuesto hasta ahora, se deduce lo siguiente:

$$\tilde{X}(f) = (-j \cdot \text{sgn}f) \cdot X(f)$$

La variable compleja $\tilde{X}(f)$ no es la transformada de Hilbert de la variable compleja $X(f)$. La relación existente entre $\tilde{X}(f)$ y $\tilde{x}(f)$ consiste en que $\tilde{x}(f)$ es la transformada inversa de Fourier de $\tilde{X}(f)$:

$$\tilde{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{X}(f) \cdot e^{j \cdot 2\pi \cdot f \cdot t} df$$

La transformada de Fourier de $(1/\pi \cdot t)$, es decir $(-j \cdot \text{sgn}f)$, puede ser representada como $B(f)$:

$$B(f) = -j \cdot \text{sgn}f = \begin{cases} e^{-j \cdot \frac{\pi}{2}} & f > 0 \\ 0 & f = 0 \\ e^{j \cdot \frac{\pi}{2}} & f < 0 \end{cases} \rightarrow B(f) = |B(f)| \cdot e^{-j \cdot \phi(f)}$$

Esto es, $B(f)$ es un sistema de cambio de fase de $(\pi/2)$, donde:

$$|B(f)| = 1 \quad \text{para todo } f \neq 0$$

$$\phi_b(f) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & f > 0 \\ \frac{\pi}{2} & f < 0 \end{cases}$$

Si se expresa $X(f)$ como:

$$X(f) = |X(f)| \cdot e^{-j \cdot \phi_x(f)}$$

También se puede expresar $\tilde{X}(f)$ como:

$$\tilde{X}(f) = \tilde{X}(f) \cdot e^{-j \cdot \phi_x(f)} = |X(f)| \cdot e^{-j \cdot [\phi_x(f) + \phi_b(f)]}$$

Con lo que se puede afirmar que la transformada de Hilbert consiste en pasar $x(t)$ a través de un sistema que deja la magnitud de $X(f)$ inalterada, pero cambia la fase de $\phi_b(f)$ a $[\phi_x(f) + \phi_b(f)]$. Por eso, si se utilizan los valores de $\phi_b(f)$ expuestos anteriormente, resulta:

$$\begin{cases} \phi_x(f) \rightarrow \phi_x(f) + \left(\frac{\pi}{2}\right) & f > 0 \\ \phi_x(f) \rightarrow \phi_x(f) + \left(\frac{\pi}{2}\right) & f < 0 \end{cases}$$

Es decir, se efectuará un cambio de $(\pi/2)$ para frecuencias positivas y un cambio de $(-\pi/2)$ para frecuencias negativas.

La transformada inversa de Hilbert, para este tipo de definición, puede ser expresada como:

$$x(t) = F^{-1}[(j \cdot \text{sgn} f) \cdot \tilde{X}(f)]$$

3. Definición como parte imaginaria de una señal analítica.

La tercera manera de entender la transformada de Hilbert $\tilde{x}(t)$ es por medio de la señal analítica $z(t)$ asociada con $x(t)$, y que puede ser definida como:

$$z(t) = x(t) + j \cdot \tilde{x}(t) = A(t) \cdot e^{j\theta(t)}$$

Al término $A(t)$ se le denomina señal envolvente de $x(t)$.

$$A(t) = \sqrt{x^2(t) + \tilde{x}^2(t)}$$

Y al término $\theta(t)$ señal de fase instantánea $x(t)$.

$$\theta(t) = \tan^{-1} \left[\frac{\tilde{x}(t)}{x(t)} \right] = 2\pi \cdot f_o \cdot t$$

La frecuencia instantánea f_o viene dada por:

$$f_o = \left(\frac{1}{2 \cdot \pi} \right) \cdot \frac{d\theta(t)}{dt}$$

Si se considera que $Z(f)$ es la transformada de Fourier de $z(t)$, entonces:

$$Z(f) = F[z(t)] = F[x(t) + j \cdot \tilde{x}(t)] = F[x(t)] + j \cdot F[\tilde{x}(t)] = X(f) + j \cdot \tilde{X}(f)$$

La transformada inversa de Fourier de $Z(f)$ será:

$$z(t)=F^{-1}[Z(f)] = x(t) + j \cdot \tilde{x}(t)$$

donde $\tilde{x}(t)$ es:

$$\tilde{x}(t) = H[x(t)] = Im[z(t)]$$

Cálculo de la transformada de Hilbert.

Por la definición de la transformada de Hilbert como sistema de cambio de fase de $\pi/2$, se sabe que:

$$\tilde{X}(f) = (-j \cdot sgnf) \cdot X(f)$$

De esto y de la definición como parte imaginaria de una señal analítica se deduce que:

$$Z(f) = X(f) + j \cdot \tilde{X}(f) = (1 + sgnf) \cdot X(f) = B_1(f) \cdot X(f)$$

donde los valores de $B_1(f)$ serán:

$$B_1(f) = \begin{cases} 2 & f > 0 \\ 1 & f = 0 \\ 0 & f < 0 \end{cases}$$

De todo esto se extrae que, mediante una transformación muy simple, se obtiene $Z(f)$ a partir de $X(f)$. Es decir, primero se calcularía $X(f)$ para todo f y después se definiría $Z(f)$ como:

$$Z(f) = \begin{cases} 2 \cdot X(f) & f > 0 \\ X(0) & f = 0 \\ 0 & f < 0 \end{cases}$$

La forma más recomendable de calcular la transformada de Hilbert es hallar la transformada inversa de Fourier de $Z(f)$, lo cual nos da el valor de $z(t)$, donde, como ya habíamos visto, $\tilde{x}(t) = Im[x(t)]$. Esto se puede resumir en las siguientes ecuaciones:

$$x(t) = Re[2 \cdot \int_0^{\infty} X(f) \cdot e^{i2\pi ft} df]$$

$$\tilde{x}(t) = Im[2 \cdot \int_0^{\infty} X(f) \cdot e^{i2\pi ft} df]$$

Cálculo de la transformada discreta de Hilbert.

A continuación se obtendrán las fórmulas discretas para $x(t)$ y $\tilde{x}(t)$. Partiendo de la ecuación de la transformada inversa discreta de Fourier:

$$x_n = x(n \cdot \Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot e^{\frac{j2\pi kn}{N}} \quad n = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$$

obteniendo para $N = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$ las siguientes ecuaciones:

$$x(n \cdot \Delta t) = 2 \cdot \Delta f \cdot \operatorname{Re} \left[\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}} X(k \cdot \Delta f) \cdot e^{\frac{j2\pi kn}{N}} \right]$$

$$\tilde{x}(n \cdot \Delta t) = 2 \cdot \Delta f \cdot \operatorname{Im} \left[\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}} X(k \cdot \Delta f) \cdot e^{\frac{j2\pi kn}{N}} \right]$$

Donde:

$$\Delta f = \frac{1}{N \cdot \Delta t}$$

$$X(k \cdot \Delta f) = \Delta t \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x(n \cdot \Delta t) e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}$$

Es importante resaltar que los valores de $X(k \cdot \Delta f)$ necesarios para la obtención de los valores discretos de $x(n \cdot \Delta t)$ y su transformada de Hilbert $\tilde{x}(n \cdot \Delta t)$, van desde $k = 0$ hasta $k = N/2$, por la frecuencia de Nyquist.

Finalmente, la señal discreta de la envolvente de $x(t)$ estará dada por:

$$A(n \cdot \Delta t) = \sqrt{x^2(n \cdot \Delta t) + \tilde{x}^2(n \cdot \Delta t)}$$

2.2.4 Spike-Energy

Spike-Energy es una unidad de medida utilizada para evaluar el correcto funcionamiento de un rodamiento. Es muy utilizada en máquinas con rodamientos donde el daño consiste usualmente en el desarrollo de microfisuras en las pistas de rodadura. Cada vez que el elemento rodante pasa por estas microfisuras se producen pequeños impactos que excitan los modos naturales de vibración del rodamiento, los cuales a su vez liberan una cierta cantidad de energía en pequeños intervalos de tiempo, o pulsos, a frecuencias del orden de varios miles de hertzios y con desplazamientos inferiores a 1 micra.

La vibración originada por estos pulsos es mucho menor que la vibración total y no puede ser medida utilizando los métodos convencionales. Sin embargo, la aceleración durante los pulsos es muy alta. El método de Spike-Energy consiste en detectar estos pulsos de alta aceleración y relacionarlos con defectos en rodamientos. La medida del Spike-Energy se realiza a través de un acelerómetro, cuyas frecuencias naturales, así como las de los componentes de la máquina, son excitadas por los impactos mecánicos en el rango de las frecuencias altas, dando como resultado picos periódicos de energía a alta frecuencia. La magnitud encargada de medir esta señal se denomina 'gSE', unidad de aceleración de Spike-Energy adimensional, referida al valor de la gravedad "g", más las siglas SE (Spike-Energy).

El Spike-Energy se suma a la lista de parámetros de vibración, junto a desplazamiento, velocidad y aceleración, dándonos una herramienta más para realizar un adecuado mantenimiento predictivo. Los equipos o analizadores provistos de esta capacidad registran un único valor de Spike-Energy, al cual podemos evaluarlo con respecto a valores pre-establecidos e ir viendo el desarrollo de su tendencia con respecto al tiempo. El rango de frecuencias va de los 5000 a los 25000 Hz

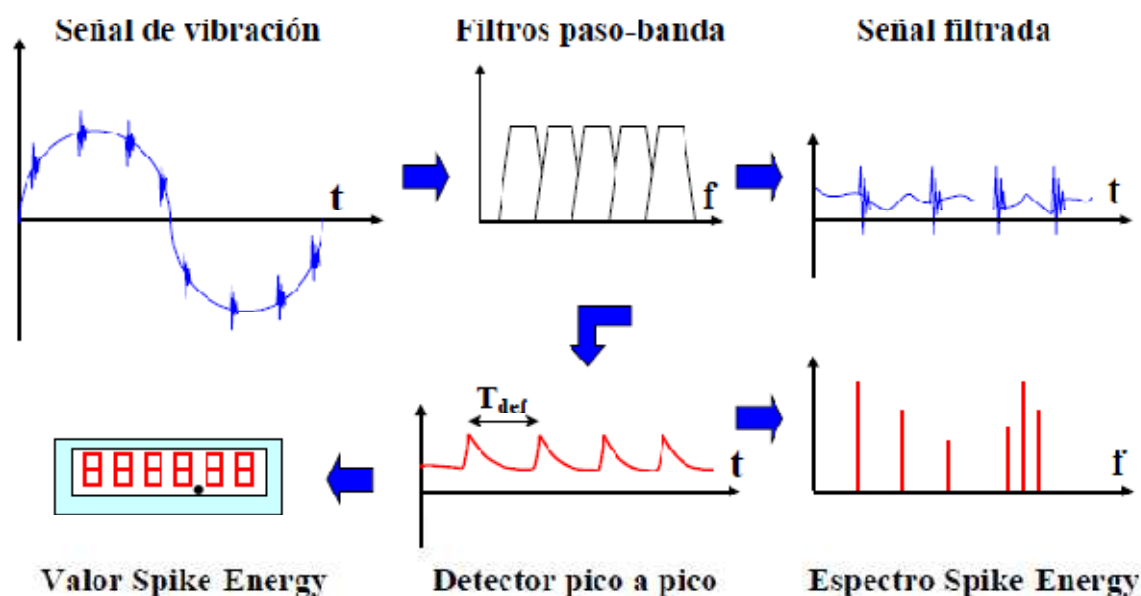


Figura 2.15. Esquema del proceso de análisis de una señal mediante la Spike-Energy.

La señal de vibración es medida por un acelerómetro y filtrada con filtros paso alto. El propósito de tener una frecuencia de corte inferior es el de eliminar de la señal las vibraciones a bajas frecuencias, dado que estas son debidas a defectos como desalineamientos, desequilibrios..., los cuales no son objeto de análisis con este método. Los valores típicos de la frecuencia de corte inferior varían según el equipo utilizado, pero nunca son inferiores a 1 KHz.

Posteriormente, la señal de vibración pasa a través de un detector pico a pico, el cual detecta y mantiene la amplitud pico a pico de la señal. La lectura en unidades gSE está determinada por la intensidad de estos picos de alta frecuencia. El esquema de procesado de señal mediante el método de Spike-Energy será similar al reflejado en la Figura 2.15. En comparación con otros procesos de detección de defectos, tales como la demodulación, el análisis Spike-Energy no sólo mantiene el grado de severidad de los defectos, sino que además realiza la frecuencia fundamental de estos defectos $f_{def} = 1/T_{def}$, así como sus armónicos, mediante la aplicación de la constante de tiempo de caída correcta. La constante de tiempo de caída es una función dependiente de la frecuencia máxima (Fmax). Esta constante determina la forma de la señal que recibe el detector pico a pico del Spike-Energy debido a que afecta tanto a la magnitud global de Spike-Energy como a los términos armónicos del espectro.

Como consecuencia del tipo de vibraciones que se observan con esta técnica, el Spike-Energy presentará un valor reducido para impactos leves o frecuencias de impacto bajas, que no produce suficiente aumento de energía de vibración para ser detectados. Los defectos que mejor se detectan, por tanto, son los de carácter generalizado, como oxidaciones, fatiga o lubricación deficiente.

La Spike-Energy es una medida de alta frecuencia y sus resultados pueden ser afectados por las condiciones del acelerómetro, es decir, es posible obtener resultados distintos al usar diferentes acelerómetros, por lo que se debe usar siempre el mismo para asegurar la consistencia de los resultados. Lo mismo ocurre con el lugar de toma de medidas y con el tipo de montaje del acelerómetro, por lo que todos estos parámetros deben permanecer constantes para asegurar un buen diagnóstico al comparar los datos.

2.2.5 Análisis Wavelet

La primera mención registrada del término *wavelet* fue en 1909, en la tesis de Alfred Haar. El término wavelet es una traducción literal de la palabra francesa ondelettes, que significa pequeñas ondas. El concepto de wavelets en su forma teórica actual fue primeramente propuesta por Jean Morlet y por el equipo del Marseille Theoretical Physics Center (Francia), con su formulación de lo que hoy conocemos como transformada wavelet continua, Olov-Strömberg con su trabajo sobre wavelets discretas (1983), Ingrid Daubechies, con su propuesta de wavelets ortogonales con soporte compacto (1988), Mallat y Meyer, con su marco multiresolución (1989), Delrat con su interpretación de la transformada wavelet en tiempo-frecuencia (1991), Newland, con su transformada wavelet armónica. La primera aplicación conocida de los wavelets fue llevada a cabo en el área de la geofísica, concretamente por el mencionado Jean Morlet y sus colaboradores.

La Figura 2.16 muestra una señal cuya frecuencia varía en el tiempo.

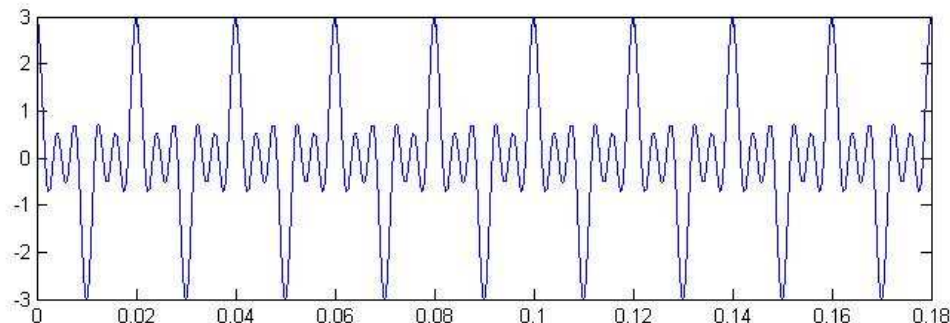


Figura 2.16. Señal temporal.

La transformada de Fourier presenta un buen rendimiento en el análisis de señales periódicas y razonablemente regulares, ya que utiliza la señal completa y analiza la energía de la distribución de frecuencias como un todo, pero sin poder hacer hincapié en los detalles que puedan ser relevantes, por lo que no resulta tan efectiva cuando se trata de señales irregulares, como la que se puede presentar cuando existen anomalías de funcionamiento. Proporciona resultados correctos acerca de las frecuencias de las ondas componentes de la señal y de su magnitud energética, pero no da información temporal acerca de las mismas, es decir, cuándo se producen (Figura 2.17).

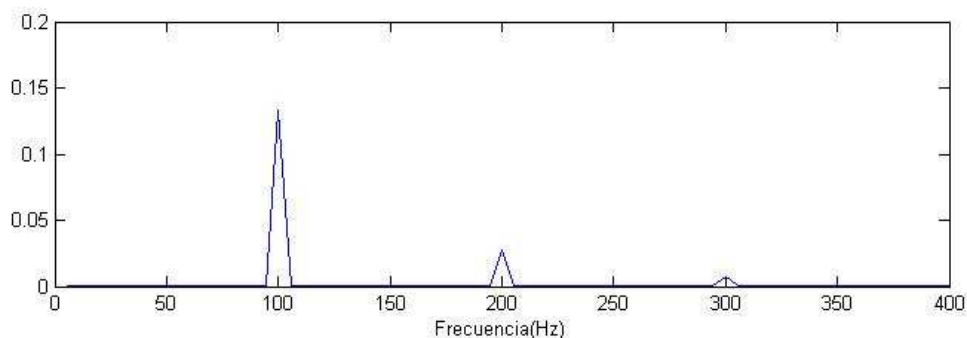


Figura 2.17. Espectro de la envolvente de la señal temporal representada en la figura 2.16.

Para intentar corregir estas deficiencias Dennis Gabor (1946) desarrolla la transformada rápida STFT (Short Time Fourier Transform), para las representaciones en un diagrama tiempo-frecuencia de señales no estacionarias.

Básicamente consiste en dividir la señal en diferentes partes donde se puede asumir que la señal es estacionaria. La señal es multiplicada por una función $w(t)$ ventana, cuya anchura debe ser igual a parte de la señal que se puede considerar como estacionaria. Esta función ventana inicialmente está localizado al inicio de la señal, es decir $t = 0$. Si se asume que la anchura de la ventana es " T " seg, entonces esta función se solapará con la señal para los primeros " $T/2$ " seg. La función ventana y la señal son entonces multiplicadas, de esta forma, solamente los primeros " $T/2$ " seg de la señal están siendo escogidos. Una vez hecho esto la nueva señal es el producto de la función ventana y la señal original a la que se le aplica la transformada de Fourier.

De este modo, se revela la información en frecuencia localizada temporalmente en el dominio efectivo de la ventana. Desplazando temporalmente la ventana se cubre el dominio de la señal obteniéndose la completa información tiempo - frecuencia de la misma: Esta variante de la Transformada de Fourier se denominó STFT y está definida por la ecuación 2.11:

$$STFT(t, f) = \int x(t)w^*(t - t') e^{-i2\pi ft} dt \quad (2.11)$$

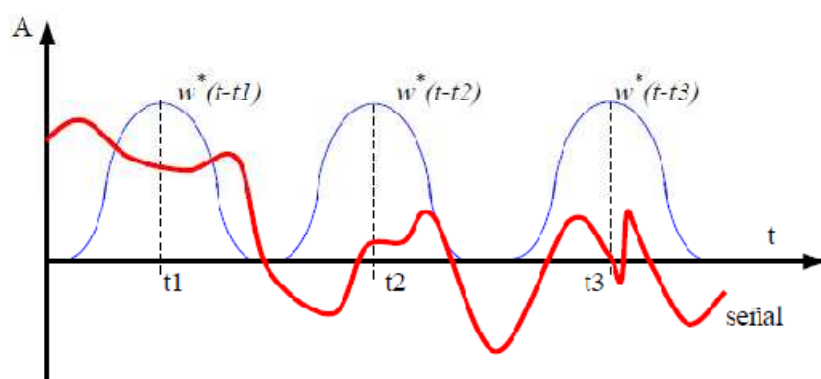


Figura 2.18. Transformada STFT.

Puede observarse la similitud con la transformada de Fourier, solo que ahora existe una ventana que se desplaza en el tiempo $w^*(t - t')$, donde t' es la anchura de la ventana, que muestra información de la señal a lo largo del tiempo, paliando algunas limitaciones de la transformada de Fourier.

El resultado de la STFT es la transformada de Fourier para cada uno de los segmentos abarcados por la ventana, dando como valor un coeficiente.

En la transformada de Fourier no existe problema de resolución en el dominio de la frecuencia, ya que se abarca toda la señal y se conoce la posición de dichas frecuencias. Tampoco existe problema de resolución en el dominio del tiempo, ya que se conoce el valor de la señal para cada instante de tiempo. Sin embargo, en la STFT la ventana que se aplica es de longitud finita, es decir sólo se aplica a una parte de la señal, con lo cual no es posible conocer exactamente la relación tiempo- frecuencia de la señal, sino tan sólo los intervalos de tiempo en los que existen determinadas bandas de frecuencias, no su valor exacto, por lo que existe un problema de resolución, debiendo existir un compromiso entre resolución en tiempo y resolución en frecuencia. En consecuencia, existe un compromiso entre buena resolución en el tiempo o buena resolución en frecuencia. Cuanto más estrecha sea la ventana se obtendrá mejor resolución en el tiempo y por lo tanto una mejor representación de la estacionalidad pero esto presenta una peor resolución en frecuencia. Por tanto, el problema consiste en la selección de una ventana para el análisis, dependiendo de la aplicación: se necesita una ventana lo suficientemente estrecha para poder considerar la señal como estacionaria, con lo que se obtiene una mejor resolución temporal, pero mala resolución frecuencial; si por el contrario se opta por una ventana más amplia, la resolución frecuencial será mejor, pero habrá una peor resolución en el tiempo.

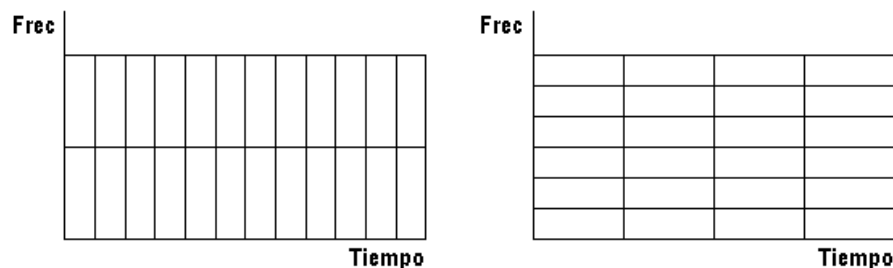


Figura 2.19. Representación en tiempo-frecuencia: a la izquierda, mejor resolución temporal; a la derecha, mejor resolución en frecuencias.

La STFT presenta a su vez otro inconveniente, ya que a pesar de mostrar información frecuencial y temporal, la anchura de las ventanas deslizantes que se utilizan poseen unas dimensiones fijas, es decir, la resolución con la que se observa la señal es la misma a bajas y altas frecuencias.

Este es el origen de la transformada wavelet, pues esta transformada maneja distintas resoluciones frecuenciales y temporales. Generalmente en las bajas frecuencias de una señal se encuentran la mayor parte de la información, quedando las altas frecuencias para detalles muy específicos, de ahí que no resulte atractivo ni eficiente analizar una señal con la misma resolución para todas las frecuencias. El objetivo de la misma es buscar una buena representación en tiempo y frecuencia de manera simultánea, para poder interpretar el intervalo de tiempo en el que aparecen determinados componentes espectrales.

La Figura 2.20a) representa el estudio tradicional de la amplitud de una señal en el dominio del tiempo, las muestras se toman a intervalos regulares de tiempo. En la Figura 2.20b) correspondiente a la FFT, la amplitud se mide en función de la frecuencia, siendo constantes los intervalos de esta. El siguiente paso, Figura 2.20c) es determinar el espectro de frecuencias de la señal en diferentes intervalos iguales de tiempo. La

diferencia entre las figuras Figura 2.20c) y d) está en que mientras que en la STFT se estudia todo el espectro de frecuencias con el mismo intervalo (ventana de anchura constante), en el análisis wavelet, el intervalo entre frecuencias de estudio es función del punto del espectro en el que nos encontremos. En el análisis wavelet, aparece el concepto de escala, relacionado con la frecuencia.

Básicamente, lo que hace la transformada wavelet es filtrar una señal en el dominio del tiempo mediante filtros paso bajo y paso alto que eliminan ciertas componentes de alta o baja frecuencia de la señal, el procedimiento se repite para las señales resultantes del proceso de filtrado anterior.

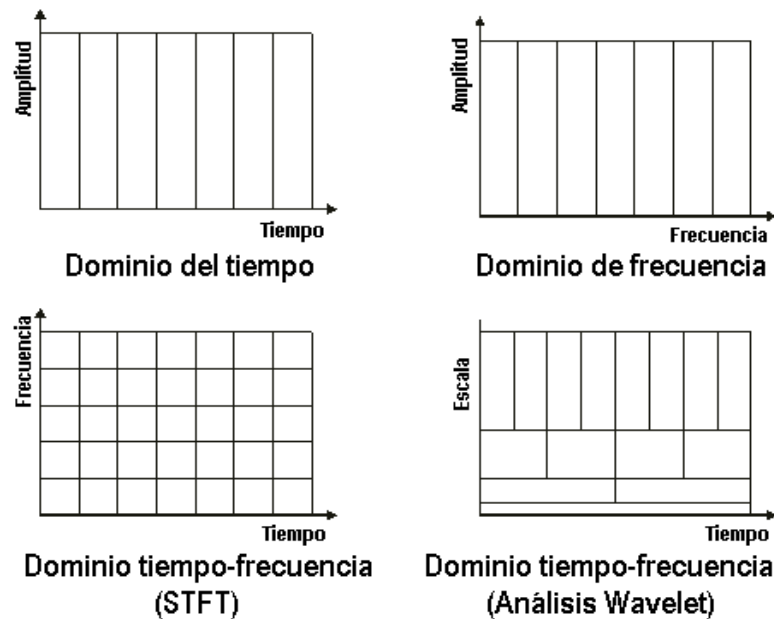


Figura 2.20. Distintos tipos de transformaciones.

Una wavelet es una forma de onda, de duración limitada, que tiene un valor medio de cero.

$$\int \psi(t) dt = 0$$

Las wavelet son unas funciones matemáticas que reacomodan la información contenida en la señal temporal en distintas componentes frecuenciales cuyas resoluciones se asocian a una escala. Una familia wavelet está definida por la ecuación 2.12:

$$\psi(t)_{a,b} = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right); \quad a, b \in R \quad a > 0 \quad (2.12)$$

Donde a es el parámetro de escala o dilatación y b es el parámetro de desplazamiento o traslación. Esta familia de funciones es una copia de una función genérica denominada wavelet madre, trasladada y escalada mediante las variables a y b .

- A: Puede asemejarse a la escala de un mapa: escalas grandes ofrecerán una visión global de la señal (bajas frecuencias de la señal), mientras que las escalas pequeñas presentan una visión más detallada (altas frecuencias de la señal) de componentes frecuenciales que aparecen durante muy poco tiempo.

- B: Está relacionada con la localización de la ventana a medida que ésta se desplaza a lo largo de la señal.

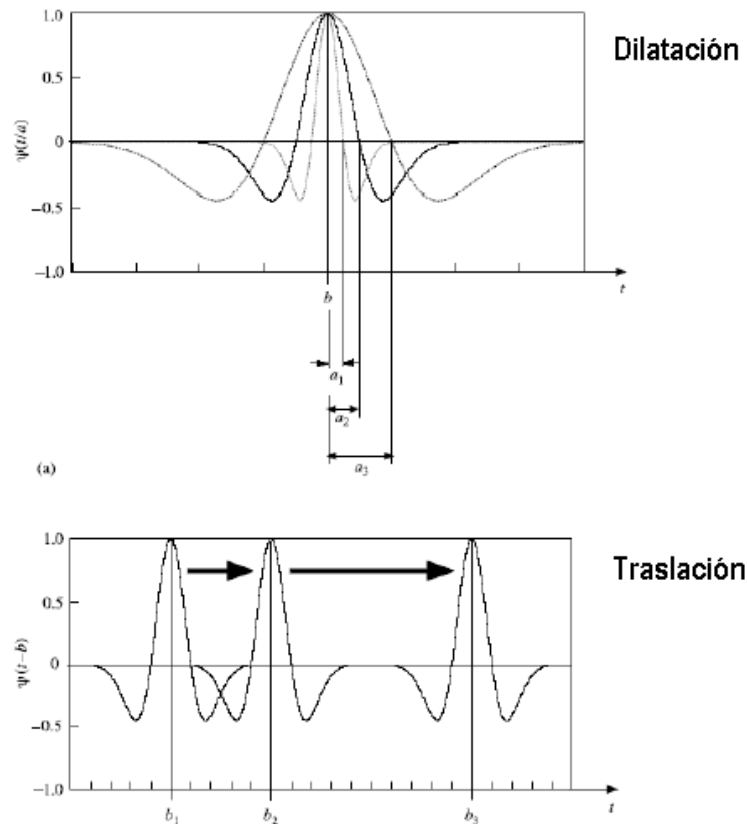


Figura 2.21. Dilatación y traslación de una wavelet madre.

La transformación continua de wavelet (CWT) es el resultado de la convolución de la señal a lo largo de todo el tiempo con versiones de la familia wavelet obtenidas a partir de la wavelet madre (versiones estiradas/comprimidas y adelantadas/retardadas). Este proceso produce coeficientes wavelet, que son función de la escala y la posición. Los pasos seguidos en la generación de una CWT son los siguientes:

- Coger un wavelet y compararlo con una sección de la señal al comienzo de la misma.
- Calcular un número, C , que represente el grado de correlación del wavelet con esta sección de la señal. Mientras más alto sea C , más similitud existe. Es importante tener en cuenta que los resultados dependerán de la forma del wavelet elegido.

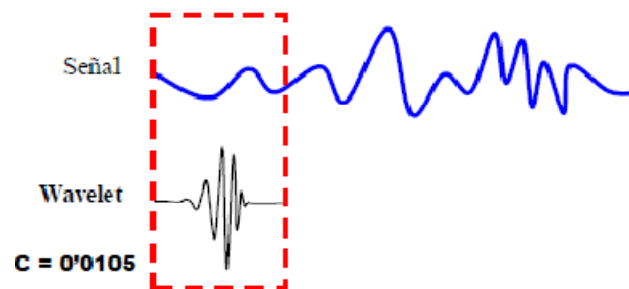


Figura 2.22. Proceso de análisis wavelet I.

CAPÍTULO 2: VIBRACIONES MECÁNICAS EN MÁQUINAS ROTATIVAS

- Desplazar el wavelet hacia la derecha y repetir los pasos 1 y 2 hasta que se haya cubierto toda la señal.

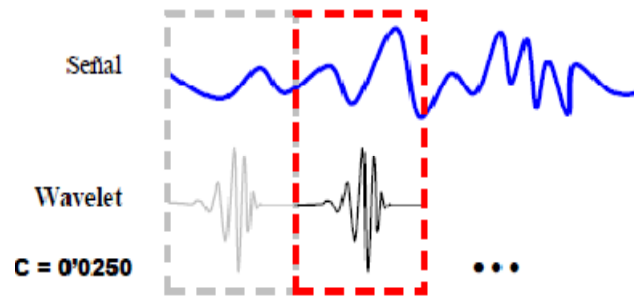


Figura 2.23. Proceso de análisis wavelet II.

- Estirar el wavelet y repetir los pasos 1-3.

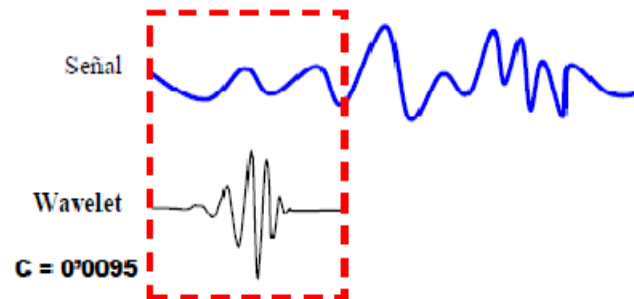


Figura 2.24. Proceso de análisis wavelet III.

- Repetir los pasos 1-4 para todas las escalas.

Cuando se ha completado el proceso, se obtienen los coeficientes producidos en diferentes escalas mediante diferentes secciones de la señal. Los coeficientes constituyen los resultados de una regresión de la señal original realizada con los wavelets, y se representan mediante un código de colores para su interpretación.

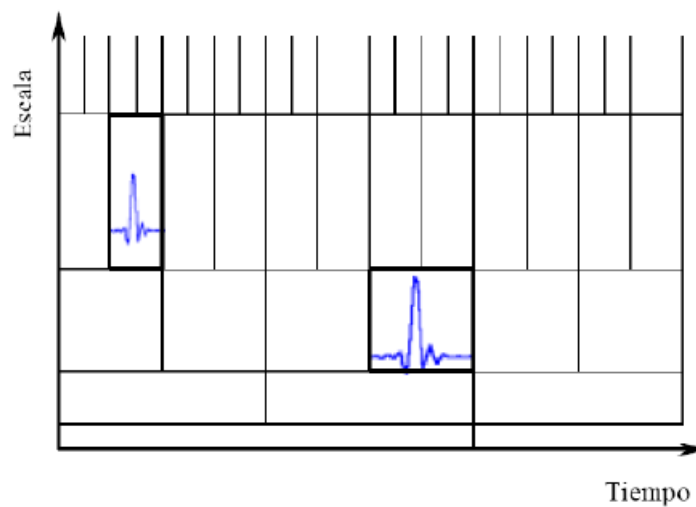


Figura 2.25. Proceso de análisis wavelet IV.

Existe una correspondencia entre las escalas y frecuencias de los wavelets, y es la siguiente:

- Baja escala // wavelet comprimida // detalle en cambios rápidos // alta frecuencia.
- Alta escala // wavelet exprimida // detalle en cambios lentos // baja frecuencia.

Cada celda en esta figura representa un valor de la WT en dicho plano. Es de destacar el hecho que estas celdas tienen un área no nula, lo cual indica que no es posible conocer el valor de un punto particular, sino de una zona o área. Sin tener en cuenta las dimensiones de las celdas, sus áreas, tanto en la STFT como en la WT, son las mismas, y están determinadas por el principio de incertidumbre de Heisenberg. En concreto, el área de cada celda se fija mediante la función de enventanado temporal en la STFT o por la Wavelet madre en la CWT (Transformada Wavelet Continua), con lo que diferentes ventanas o funciones madre dan lugar a diferentes áreas. Sin embargo, todas las áreas tienen una cota inferior dada por $\pi/4$.

Una wavelet madre tiene una serie de limitaciones. Esta ha de tener energía finita.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty$$

Debe cumplirse que:

$$C_g = \int_0^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(f)|^2}{f} df$$

donde $|\hat{\psi}(f)| \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-i2\pi ft} dt$ es la transformada de Fourier de $\psi(t)$.

Existen tres conceptos importantes en las wavelets: los momentos de desvanecimiento, soporte compacto y simetría. Los momentos de desvanecimiento nos permiten conocer la forma de la wavelet y es un parámetro para saber la adaptabilidad de la wavelet a un polinomio dado. Los momentos de desvanecimiento están definidos por la ecuación:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \cdot t^i dt = 0$$

Una función tiene n momentos de desvanecimiento si la integral es nula para $i = 0, 1, \dots, n-1$. Generalmente el número de momentos de desvanecimiento de una wavelet determina el orden de la transformada.

El soporte compacto de una wavelet se refiere a que las funciones base son distintas de cero en un intervalo finito:

$$\psi(t) = 0 \quad \text{si } |t| > N \quad (N \neq 0)$$

La simetría en los filtros se busca con el fin de evitar distorsiones en la información mediante la fase lineal, esto se expresa como $\varphi(w) = k \cdot w$, donde k es una constante y w es la fase.

CAPÍTULO 2: VIBRACIONES MECÁNICAS EN MÁQUINAS ROTATIVAS

A continuación se muestran las wavelet o familias de wavelet más conocidas y utilizadas. Las imágenes de las wavelet son extraídas de la Wavelet Toolbox de Matlab, la librería que utiliza el programa SIMROD, desarrollado en el capítulo 6.

- Haar. La wavelet de Haar o Daubechies de orden 1, es la primera y la más sencilla de las wavelets. No tiene buena localización tiempo-frecuencia además, no es continua, y por tanto no diferenciable.

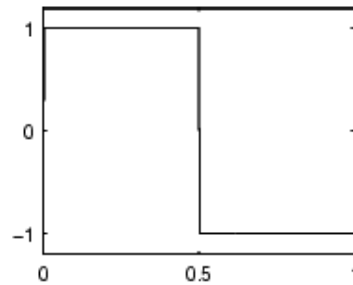


Figura 2.26. Wavelet Haar.

- Daubechies. Desarrolladas por Ingrid Daubechies, se las denomina dbN, donde N es el orden de la ondícula. La wavelet db1 es idéntica a la wavelet de Haar.

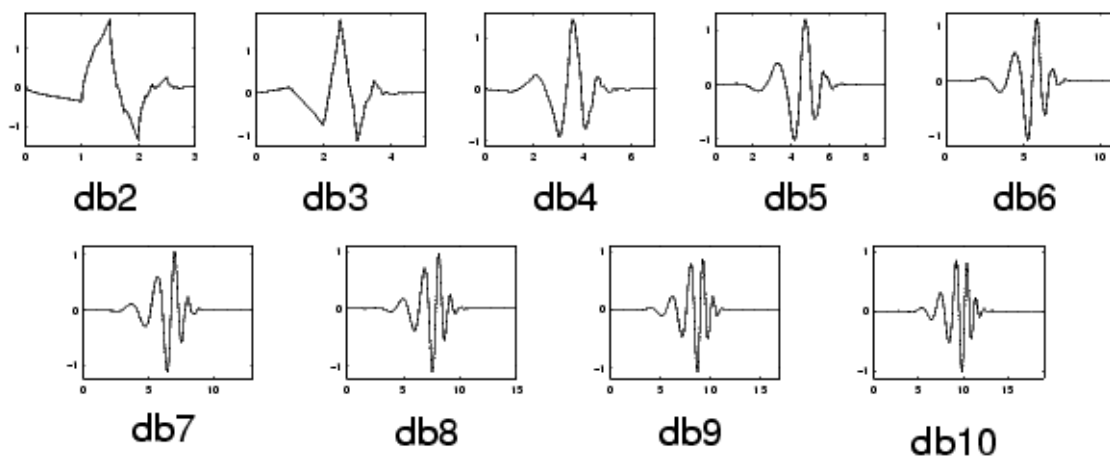


Figura 2.27. Wavelets de la familia Daubechies.

- Biortogonales. Son pares de wavelet, una de las cuales se utiliza para la descomposición y otra para la reconstrucción. Poseen soporte compacto y la simetría, permiten la reconstrucción exacta de la señal y por tanto, son posibles con filtros FIR (Finite Impulse Response), lo cual en las wavelets ortogonales es imposible, exceptuando la wavelet Haar. El orden de estas wavelets está dado por N_r y N_d .

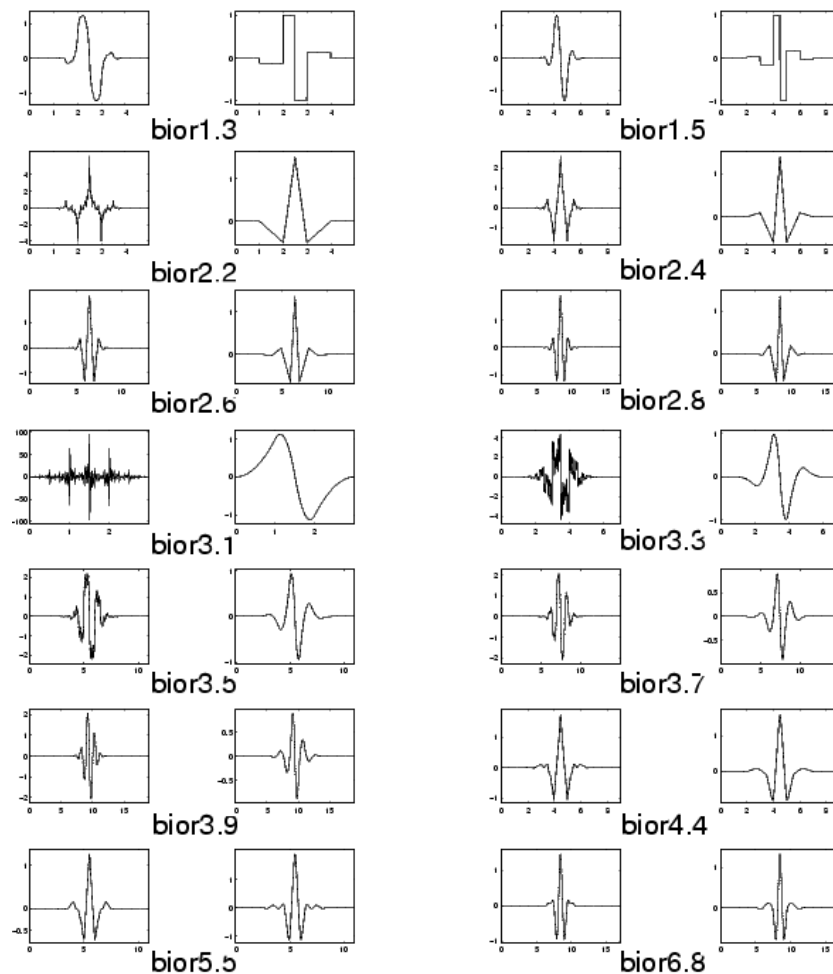


Figura 2.28. Wavelets de la familia biortogonales.

- **Coiflets.** Estas wavelets fueron igualmente creadas por Daubechies con ayuda de Coifman. Su denominación es coifN donde N representa el orden de la ondícula. Esta familia de wavelets posee un mayor número de momentos de desvanecimiento: $2N$. La función wavelet y la de escalamiento son mucho más simétricas que las wavelets presentadas con anterioridad. Poseen igualmente soporte compacto y el número de filtros es $6N$.

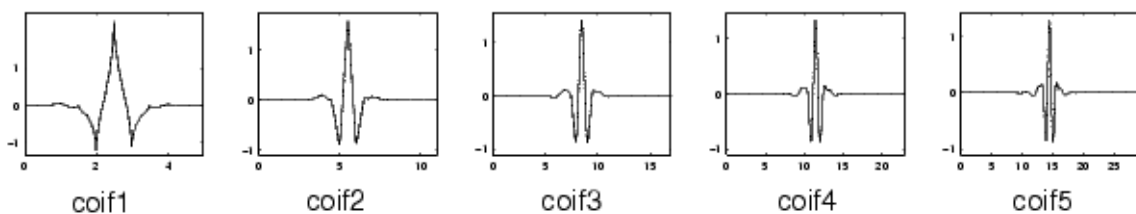


Figura 2.29. Wavelets de la familia Coiflets.

- **Symmlets.** Con el fin de agregar un poco de simetría a sus wavelets, Daubechies creó a partir de modificaciones de las ondículas db la siguiente familia de wavelets denominadas Symmlets. Esta familia es de soporte compacto y puede realizar la transformada continua y discreta wavelet con ondículas cercanas a la simetría obtenidas.

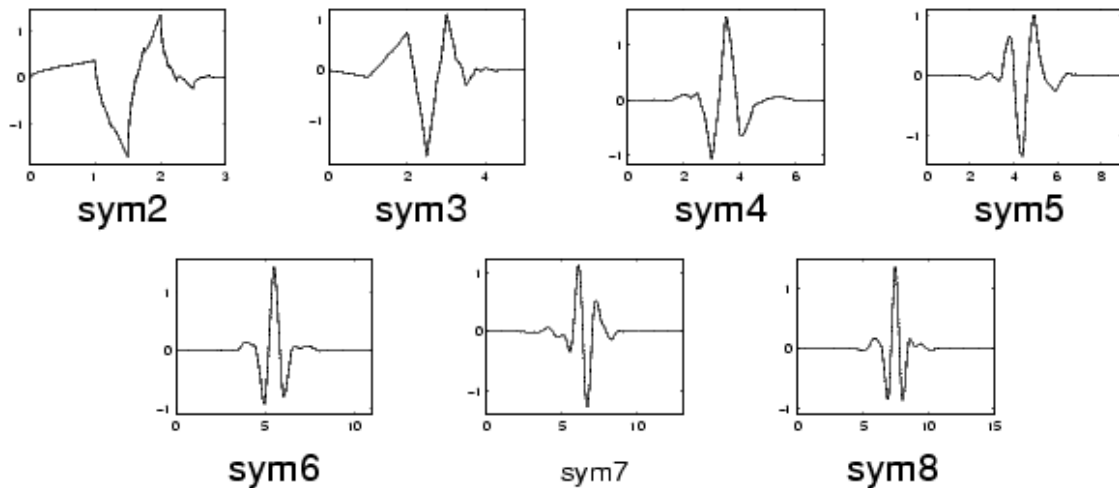


Figura 2.30. Wavelets de la familia Symlets.

- Morlet. Esta wavelet no tiene función de escalado, pero es explícita.

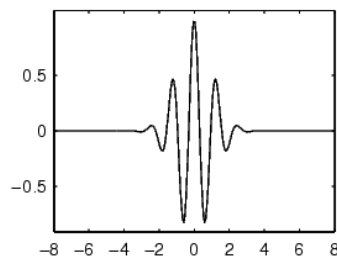


Figura 2.31. Wavelet Morlet

- Mexican hat. Otra wavelet muy recurrida para el análisis de señales es la wavelet mexican hat por la forma de su gráfico [ALA03] y es la segunda derivada de la función de densidad de probabilidad Gaussiana.

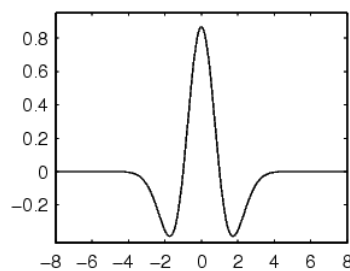


Figura 2.32. Wavelet Mexican Hat.

La transformada wavelet inversa se lleva a cabo mediante la expresión mostrada en la ecuación 2.13.

$$x(t) = \frac{1}{c_g} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty T(a, b) \psi(t)_{a,b} \frac{da \cdot db}{b^2} \quad (2.13)$$

Cuando se usan las wavelet discretas para transformar una señal a , el resultado de la transformación son una serie de coeficientes que se conocen como la descomposición en

series wavelet. Para muchas señales, las bajas frecuencias contienen la parte más importante de la información, en cambio, la alta frecuencia contiene los detalles de la misma. Por ejemplo, si escuchamos una voz humana a la que se haya extraído las altas frecuencias, todavía seremos capaces de entender que dice en cambio, si lo que extraemos de la señal son las bajas frecuencias, no podremos entender el mensaje que contiene.

La transformada wavelet discreta se calcula pasando la señal por una serie de filtros. Primero se pasa por un filtro paso bajo $[L]$ que elimina las frecuencias que se encuentran por encima de la mitad de la frecuencia máxima, lo que lleva a la convolución de ambas:

$$y[n] = (x * g)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot g[n - k]$$

La señal se descompone de forma simultánea con un filtro paso alto $[H]$. Las salidas del filtro paso alto contienen los coeficientes denominados de detalle, mientras que las salidas del filtro paso bajo, son los coeficientes de aproximación. Ambos filtros están relacionados entre sí como filtro espejo quadrature o conjunto de filtros que divide la señal de entrada en dos bandas que se submuestran por 2. Además, estos filtros de media banda forman bases ortonormales que permiten que se pueda reconstruir la señal a partir de la transformada utilizando filtros de síntesis específicos.

Después de pasar la señal por el filtro paso bajo $[L]$ de media banda, como la frecuencia máxima está reducida a la mitad, la mitad de las muestras pueden ser descartadas, de acuerdo con la regla de Nyquist. Por tanto, se submuestran las salidas de los filtros por 2 y con esto, la escala de la señal se duplica:

$$y_{low}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot g[2 \cdot n - k]$$

$$y_{high}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[2 \cdot n - k]$$

Esta descomposición reduce la resolución en el tiempo a la mitad ya que solamente la mitad de las muestras a la salida de cada filtro caracterizan la señal entera, sin embargo, cada salida tiene la mitad de la banda de frecuencia de la señal original y como consecuencia, la resolución de la frecuencia se duplica.

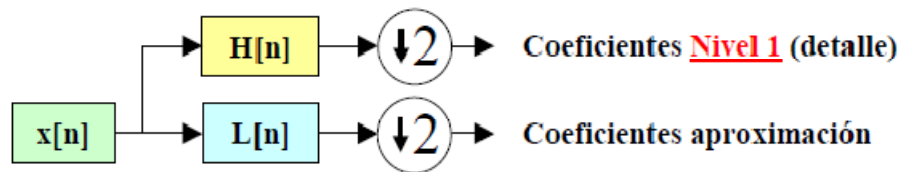


Figura 2.33. Procedimiento seguido en la Wavelet discreta I.

Este proceso se repite con los coeficientes de aproximación o coeficientes que han pasado por el filtro paso bajo.

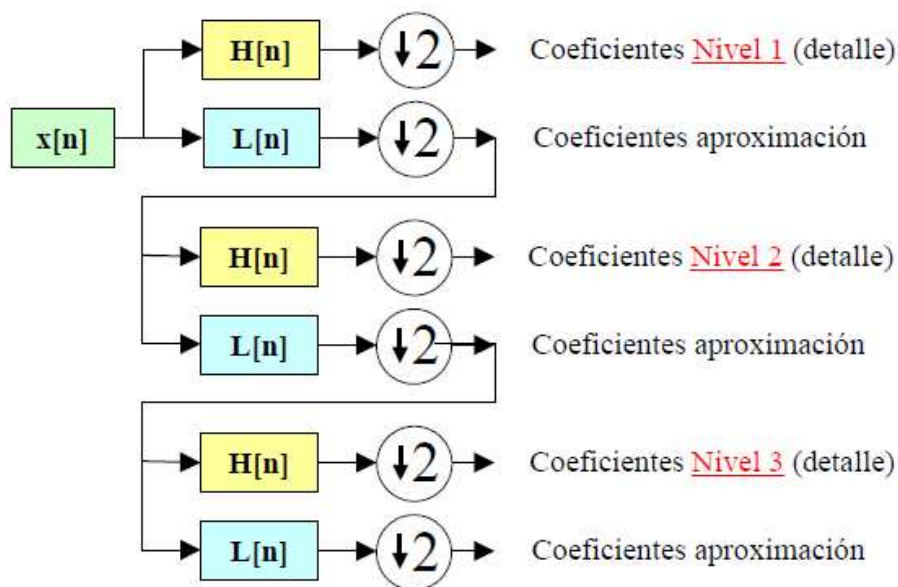


Figura 2.34. Procedimiento seguido en la Wavelet discreta II.

El resultado de la transformada wavelet consiste en un componente de aproximación final y todos los componentes de información detallada para cada nivel a la salida del filtro paso alto para el nivel correspondiente.

El proceso continúa hasta que queden solamente dos muestras haciendo que las salidas de los filtros paso bajo sean nuevamente filtradas para una mayor descomposición. La transformada wavelet de la señal original se obtiene concatenando todos los coeficientes, comenzando desde el último nivel de descomposición por tanto, la transformada wavelet tendrá entonces el mismo número de coeficientes que la señal original.

Las frecuencias que son más dominantes en la señal original aparecerán como altas amplitudes en la región de la transformada wavelet que incluye esas frecuencias. La diferencia entre la transformada de Fourier y la wavelet es que con la wavelet no se pierde la localización en el tiempo de estas frecuencias. Sin embargo, la localización en el tiempo tendrá una resolución que dependerá del nivel en que aparezca, de este modo si la información principal contenida en la señal está en altas frecuencias, como sucede a menudo, entonces la localización en el tiempo de estas frecuencias será más precisa, puesto que estarán caracterizadas por un mayor número de muestras. Por otro lado, si la información principal está a muy bajas frecuencias entonces su localización en el tiempo no podrá ser muy precisa, dado que existirán muy pocas muestras para caracterizar la señal a estas frecuencias.

La reconstrucción en este caso es muy simple, dado que los filtros de banda media forman una base ortonormal, para estos efectos el procedimiento anteriormente descrito se sigue en sentido inverso, de este modo la señal es interpolada por 2 y pasada a través de los filtros de síntesis $L'[n]$ y $H'[n]$, paso alto y paso bajo respectivamente, para posteriormente sumarse ambas salidas. Un hecho interesante es que los filtros de análisis y síntesis son idénticos. Sin embargo, si los filtros no son de banda media ideal la reconstrucción perfecta de la señal no puede conseguirse. Aun cuando no es posible realizar filtros ideales, bajo ciertas condiciones es posible encontrar filtros que permitan una reconstrucción perfecta de la señal.

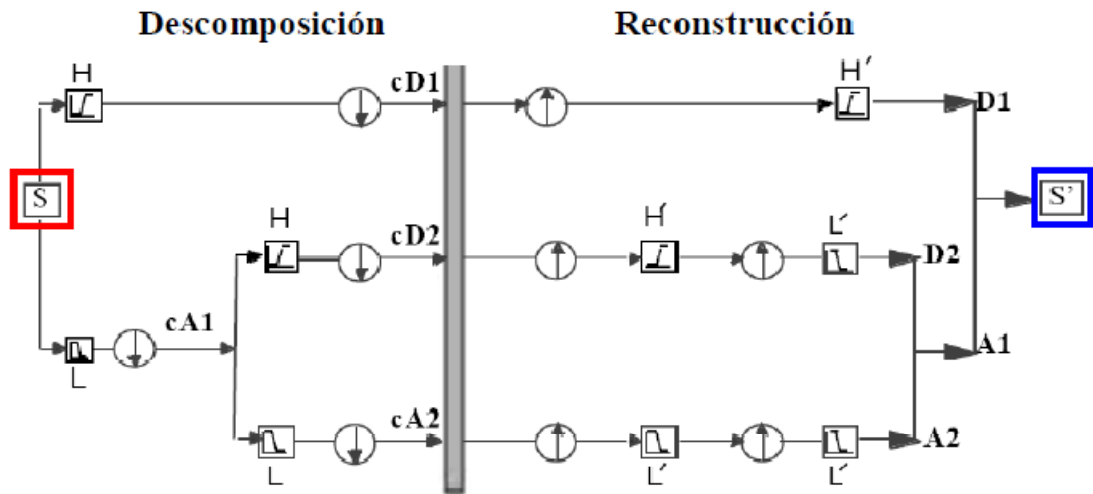


Figura 2.35. Procedimiento seguido en la transformada Wavelet discreta inversa.

2.3 Comportamiento vibratorio del rodamiento con defecto localizado

Los defectos en los rodamientos pueden clasificarse en defectos localizados y defectos distribuidos.

- Decimos que un defecto es localizado cuando este se encuentra en una posición bien definida en alguno de los componentes del rodamiento, ya sea el anillo interno, anillo externo o los elementos rodantes. Los defectos localizados abarcan la formación de hoyos ó picaduras, las grietas, etc. siendo las picaduras o 'spalling' los que predominan. El defecto originado por una grieta de fatiga que surge bajo la superficie del elemento y se propaga hacia el exterior hasta que arranca una lámina de metal, formando así una pequeña picadura de aproximadamente $100 \mu m$ o superior, en su inicio.
- Los defectos distribuidos incluyen rugosidad superficial y ondulaciones en las pistas, pistas desalineadas y elementos rodantes de tamaños ó geometrías defectuosas.

Cuando un elemento rodante pasa sobre un defecto local, da origen a una fuerza impulsiva que genera una vibración. Mediante un análisis de la misma, se puede detectar la presencia de dicho defecto.

Cuando el defecto se encuentra en su estado incipiente, estas fuerzas impulsivas, contienen muy poca energía, pues se trata de impulsos de muy corta duración, aunque las amplitudes de la vibración pueden llegar a ser relativamente elevadas. La detección de un defecto en un rodamiento a partir de la señal de vibración generada por una máquina en funcionamiento presenta cierta complejidad respecto a otros defectos como desequilibrios, desalineamientos, holguras, etc. ya que presentan un menor intercambio de energía.

Cuando un rodamiento tiene un defecto, en su espectro de frecuencias aparecen grandes amplitudes a unas frecuencias muy bien definidas. En principio, estas frecuencias dependen de unas características propias del rodamiento, como son el número de elementos rodantes y las dimensiones de los elementos del rodamiento y de las condiciones de funcionamiento.

2.3.1 Frecuencias rotacionales

Para poder interpretar con claridad las ecuaciones que permiten calcular la frecuencia que define el defecto localizado en un elemento del rodamiento, es necesario entender la relación de velocidades relativas entre los elementos móviles del mismo.

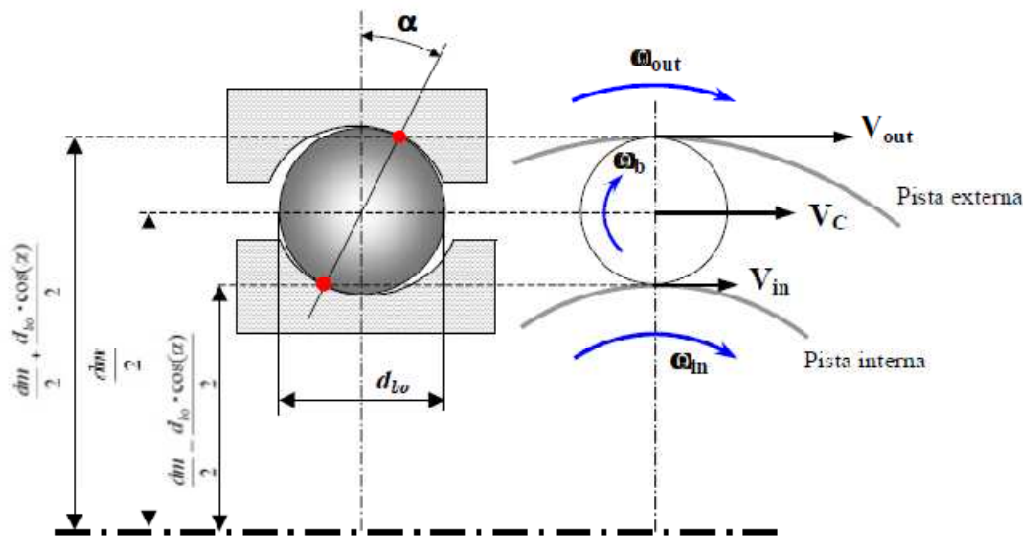


Figura 2.36. Parámetros cinemáticos del rodamiento.

La Figura 2.36 muestra la sección frontal y transversal de la geometría de un rodamiento. V_{out} , V_C y V_{in} representan las velocidades lineales del punto de contacto bola-anillo externo, centro de la bola y punto de contacto bola-anillo interno respectivamente. El ángulo α es el ángulo de contacto y d_m es el diámetro medio del rodamiento.

La velocidad lineal del centro de la bola viene dada por la ecuación 2.20:

$$V_C = \frac{V_{out} + V_{in}}{2} \quad (2.14)$$

La velocidad angular de la bola respecto al centro del rodamiento o velocidad angular de la jaula vale:

$$\omega_c = \frac{V_C}{d_m/2} = \frac{(V_{out} + V_{in})/2}{d_m/2} = \frac{V_{out} + V_{in}}{d_m} \quad (2.15)$$

Si la pista externa gira con una velocidad angular ω_{out} , la velocidad lineal del punto de contacto bola-anillo externo, V_{out} es de:

$$V_{out} = \omega_{out} \cdot \left(\frac{d_m}{2} + \frac{d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{2} \right) \quad (2.16)$$

2.3 COMPORTAMIENTO VIBRATORIO DEL RODAMIENTO CON DEFECTO LOCALIZADO

Si la pista interna gira con una velocidad angular ω_{in} , la velocidad lineal del punto de contacto bola-anillo interno, V_{in} es de:

$$V_{in} = \omega_{in} \cdot \left(\frac{d_m}{2} - \frac{d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{2} \right) \quad (2.17)$$

Sustituyendo en la ecuación 2.15 V_{out} y V_{in} con las expresiones halladas en las ecuaciones 2.16 y 2.17 queda:

$$\omega_c = \frac{\omega_{out} \cdot \left(\frac{d_m}{2} + \frac{d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{2} \right) + \omega_{in} \cdot \left(\frac{d_m}{2} - \frac{d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{2} \right)}{d_m} \quad (2.18)$$

Operando queda finalmente:

$$FTF = \omega_c = \frac{1}{2} \left[\omega_{out} \cdot \left(1 + \frac{d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{d_m} \right) + \omega_{in} \cdot \left(1 - \frac{d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{d_m} \right) \right] \quad (2.19)$$

FTF = Fundamental Train Frequency.

La frecuencia de paso de las bolas por un defecto en el anillo externo, $BPFO$ (Ball Pass Frequency of the Outer race), puede obtenerse como el producto del número de bolas Z por la velocidad angular relativa entre el anillo externo y la jaula:

$$BPFO = Z \cdot (\omega_c - \omega_{out}) \quad (2.20)$$

Sustituyendo ω_c por la ecuación 2.18 queda:

$$\begin{aligned} BPFO &= Z \cdot \left(\frac{1}{2} \left[\omega_{out} \cdot \left(1 + \frac{d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{d_m} \right) + \omega_{in} \cdot \left(1 - \frac{d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{d_m} \right) \right] - \omega_{out} \right) \\ BPFO &= Z \cdot \left[\frac{\omega_{in}}{2} - \frac{\omega_{in} \cdot d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{2 \cdot d_m} + \frac{\omega_{out}}{2} - \omega_{out} + \frac{\omega_{out} \cdot d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{2 \cdot d_m} \right] \\ BPFO &= Z \cdot \left[\frac{\omega_{in} - \omega_{out}}{2} - \frac{\omega_{in} - \omega_{out}}{2} \cdot \frac{d_{bo} \cos(\alpha)}{d_m} \right] \end{aligned}$$

quedando finalmente

$$BPFO = \frac{Z}{2} \cdot (\omega_{in} - \omega_{out}) \left[1 - \frac{d_{bo} \cos(\alpha)}{d_m} \right] \quad (2.21)$$

La frecuencia de paso de las bolas por un defecto en el anillo externo, $BPFI$ (Ball Pass Frequency of the inner race), puede obtenerse como el producto del número de bolas Z por la velocidad angular relativa entre el anillo externo y la jaula:

Frecuency of the inner race), puede obtenerse como el producto del número de bolas Z por la velocidad angular relativa entre el anillo externo y la jaula:

$$BPFI = Z \cdot (\omega_{in} - \omega_c) \quad (2.22)$$

Sustituyendo ω_c por la ecuación 2.18 queda:

$$\begin{aligned}
 BPF I &= Z \cdot \left(\omega_{in} - \frac{1}{2} \left[\omega_{in} \cdot \left(1 - \frac{d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{d_m} \right) + \omega_{out} \cdot \left(1 + \frac{d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{d_m} \right) \right] \right) \\
 BPF I &= Z \cdot \left[\omega_{in} - \frac{\omega_{in}}{2} + \frac{\omega_{in} \cdot d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{2 \cdot d_m} - \frac{\omega_{out}}{2} - \frac{\omega_{out} \cdot d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{2 \cdot d_m} \right] \\
 BPF I &= Z \cdot \left[\frac{\omega_{in} - \omega_{out}}{2} + \frac{\omega_{in} - \omega_{out}}{2} \cdot \frac{d_{bo} \cos(\alpha)}{d_m} \right] \quad (2.23)
 \end{aligned}$$

quedando finalmente

$$BPF I = \frac{Z}{2} \cdot (\omega_{in} - \omega_{out}) \left[1 + \frac{d_{bo} \cos(\alpha)}{d_m} \right] \quad (2.24)$$

Por último, la velocidad angular de una bola sobre su propio centro o *spin*, representa la frecuencia de un defecto localizado en el elemento rodante *BSF* (Ball Spin Frequency). Considerando el punto de contacto de la bola con el anillo interno tenemos:

$$BSF = \frac{(\omega_{in} - \omega_c) \cdot \left(\frac{d_m}{2} - \frac{d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{2} \right)}{\frac{d_{bo}}{2}} \quad (2.25)$$

Sustituyendo ω_c según la ecuación 2.18 tenemos:

$$\begin{aligned}
 BSF &= \left(\omega_{in} - \frac{1}{2} \left[\omega_{in} \cdot \left(1 - \frac{d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{d_m} \right) + \omega_{out} \cdot \left(1 + \frac{d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{d_m} \right) \right] \right) \cdot \\
 &\quad \left(\frac{d_m - d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{d_{bo}} \right)
 \end{aligned}$$

Operando y ordenando de forma conveniente, obtenemos finalmente la ecuación 2.29

$$BSF = \frac{d_m}{2 \cdot d_{bo}} (\omega_{in} - \omega_{out}) \cdot \left[1 - \left(\frac{d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{d_m} \right)^2 \right]$$

Las ecuaciones 2.20, 2.27, 2.28 y 2.29 son de carácter general, donde los dos anillos se encuentran en movimiento. Generalmente, en anillo exterior es estacionario, siendo $\omega_{out} = 0$. Además, la velocidad angular del anillo interno suele darse en revoluciones por minuto. Realizando estas simplificaciones, las ecuaciones quedan en la forma:

$$FTF = \frac{\omega_{in}}{2} \cdot \left(1 - \frac{d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{d_m} \right) \quad (2.26)$$

$$BPFO = \frac{Z \cdot \omega_{in}}{2} \cdot \left(1 - \frac{d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{d_m} \right) \quad (2.27)$$

$$BPF I = \frac{Z \cdot \omega_{in}}{2} \cdot \left(1 + \frac{d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{d_m} \right) \quad (2.28)$$

$$BSF = \frac{d_m \cdot \omega_{in}}{2 \cdot d_{bo}} \cdot \left[1 - \left(\frac{d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{d_m} \right)^2 \right] \quad (2.29)$$

2.3.2 Zonas del espectro de defectos

En el espectro de potencia de la señal de vibración generada por un rodamiento, (diagrama de la PSD), pueden distinguirse cuatro zonas características, tal y como muestra la Figura 2.37.

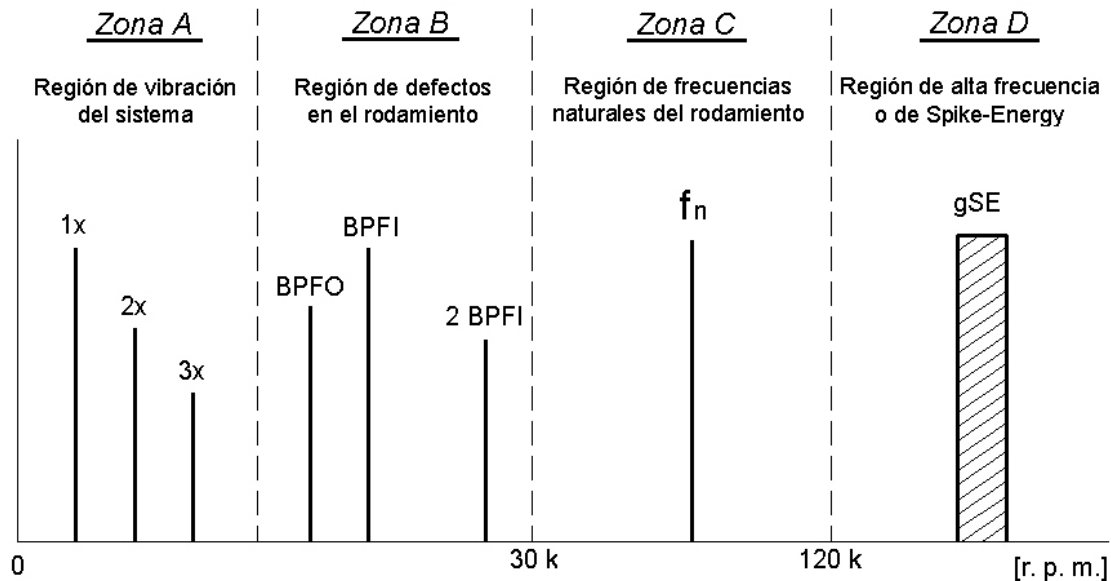


Figura 2.37. Espectro de frecuencia característico de la vibración generada por un rodamiento defectuoso.

- **Zona A.** Región de la vibración del sistema. Las vibraciones ligadas a anomalías tales como el desequilibrio, el desalineamiento o la inestabilidad dinámica del rotor se sitúan en un rango de frecuencia comprendido entre 0.25 y 3 veces la velocidad de rotación del eje de la máquina. Algunas de ellas pueden derivar de un deterioro en los rodamientos, ya que el desgaste o la holgura en los rodamientos producen excentricidad en el eje.
- **Zona B.** Región de los defectos en el rodamiento. Esta banda corresponde al rango de frecuencias comprendidas entre la frecuencia de paso de elemento rodante (número de veces que un elemento rodante pasa por un punto de la pista interior o exterior) y siete veces esta frecuencia. Representa la banda que aporta mayor cantidad de información sobre el estado de deterioro de los rodamientos. En ella aparecen reflejadas las frecuencias generadas por los defectos en el rodamiento. El 90 por ciento de los fallos de los rodamientos se deben a grietas en los elementos rodantes, pista de rodadura interna o externa, que generan frecuencias en esta banda. El 10 por ciento restante son producidas por grietas en la caja de los rodamientos y dan lugar a frecuencias en la región de vibración del rotor.

- Zona C. Región correspondiente a las frecuencias naturales de los componentes de los rodamientos. Las medidas realizadas en esta región deben ser complementadas con medidas en las otras regiones ya que son más fiables. Esta zona nos proporciona una idea sobre el estado del defecto pero debemos complementarlas con las tomadas en las regiones anteriores para tener información de la naturaleza del defecto.
- Zona D. Región de alta frecuencia o de Spike Energy. Esta región cubre el rango de frecuencias más elevado. Esta región nos proporciona una clara idea de la evolución del defecto junto con una pronta identificación del defecto ya que es la primera zona en la que se advierten estos deterioros incipientes. El problema de esta zona es que es una región ultrasónica y requiere de un sensor especialmente diseñado para detectar frecuencias muy altas. Circuitos de filtros especiales dejan pasar sólo esta región de frecuencia.

2.3.3 Evolución espectral del desarrollo de los defectos

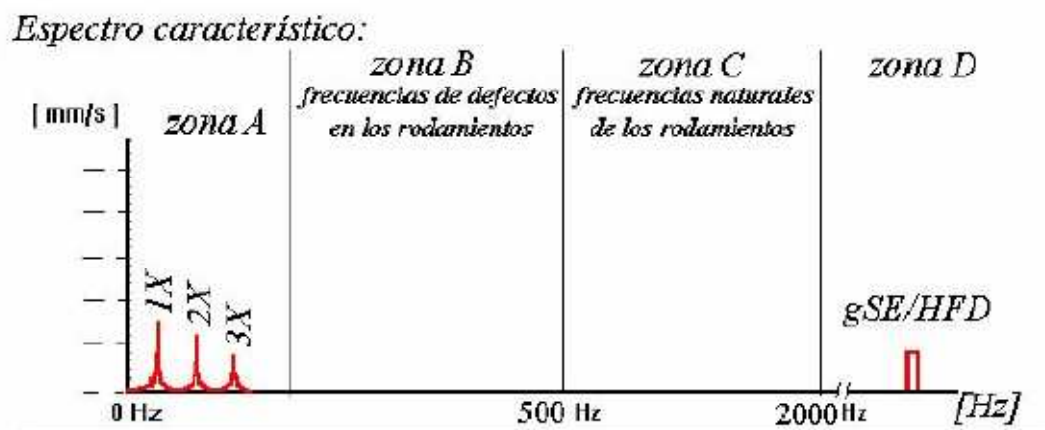


Figura 2.38. Espectro representativo del estado I de la evolución del defecto en el rodamiento.

- Estado I. En este estado, el rodamiento todavía dispone de vida remanente considerable (en torno al 10 o 20 por ciento). Los defectos consisten en picaduras, la mayoría microscópicas, difíciles de identificar al tacto o visualmente, sólo identificables al microscopio. Además, no se generará ruido perceptible por el oído humano ni la temperatura se elevará significativamente. Para este estado, el único indicador del defecto es el marcado incremento de los valores globales del Spike-Energy (SE) o pico de energía (aparecen algunos picos en la región de alta frecuencia), ya que el espectro es normal (como el de un rodamiento nuevo) y no se refleja el defecto en él (Figura 2.38). Normalmente, el Spike-Energy (S. E.) incrementa su valor desde un nivel de 0,02-0,04 gSE que presenta en rodamientos nuevos hasta un nivel de 0,15-0,25 gSE. Estos valores del S. E. son de referencia, pues el valor del S. E. varía mucho con el tipo de máquina, el punto de medición, la velocidad de rotación de la máquina, la lubricación, la rigidez y tamaño del soporte y, sobre todo, si el rodamiento está próximo a engranajes.

2.3 COMPORTAMIENTO VIBRATORIO DEL RODAMIENTO CON DEFECTO LOCALIZADO

Espectro característico:

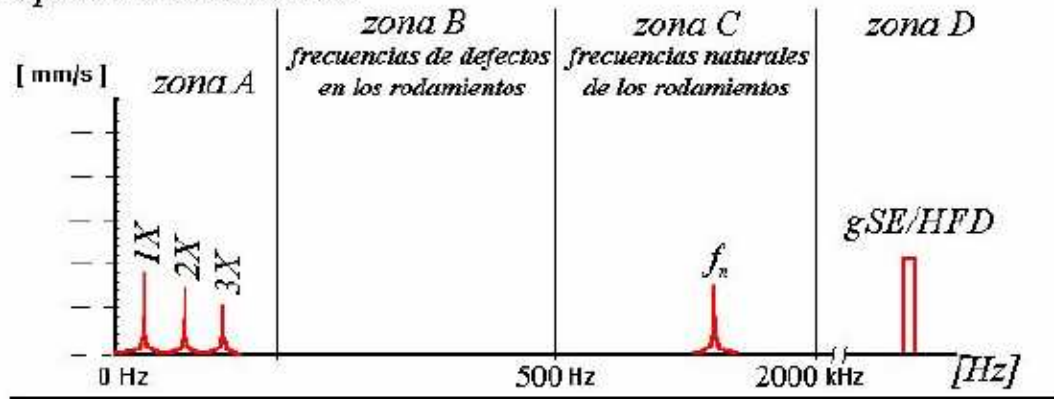


Figura 2.39. Espectro representativo del estado II de la evolución del defecto en el rodamiento.

- Estado II. Cuando llega a este estado, el rodamiento dispone del 5-10 por ciento de vida remanente. Los defectos consisten en picaduras no visibles sin la ayuda de una lente de aumento o microscopio. Se observa un ligero incremento del ruido pero la elevación de la temperatura es prácticamente inapreciable. La aparición de estos pequeños defectos en el rodamiento repercute en el espectro, comenzando a excitarse las frecuencias de resonancia de los componentes del rodamiento y de su soporte que se concentrarán, aproximadamente, en el rango de frecuencias de 500-2000 Hz (Figura 2.39).

Las frecuencias naturales de la mayor parte de los rodamientos montados en su soporte suelen estar entre los 850 y 1700 Hz, y su ubicación frecuencial no varía con la velocidad, aunque sí la amplitud, puesto que a mayor velocidad de rotación la energía intercambiada en los impactos es más elevada. La respuesta en la zona de Spike-Energy también se ve afectada con un aumento de valor y, en algunos casos, se incrementa hasta duplicarse. Al inicio del estado 2, normalmente, sólo aparecerán en el espectro una o más frecuencias discretas en la zona antes delimitada para las frecuencias de resonancia. Sin embargo, hacia el final del estado 2, dichas frecuencias conservarán la misma amplitud pero estarán moduladas a la velocidad de giro del rodamiento, tanto más cuanto el defecto vaya progresando en su deterioro, lo que se hace patente en el espectro por la aparición de bandas laterales alrededor de la frecuencia de resonancia, con un desplazamiento arriba y abajo de la frecuencia de resonancia de 1 x r.p.m., o, más raramente, dicho desplazamiento toma el valor de la frecuencia de defecto en pista interior (BPFI) o exterior (BPFO).

Espectro característico:

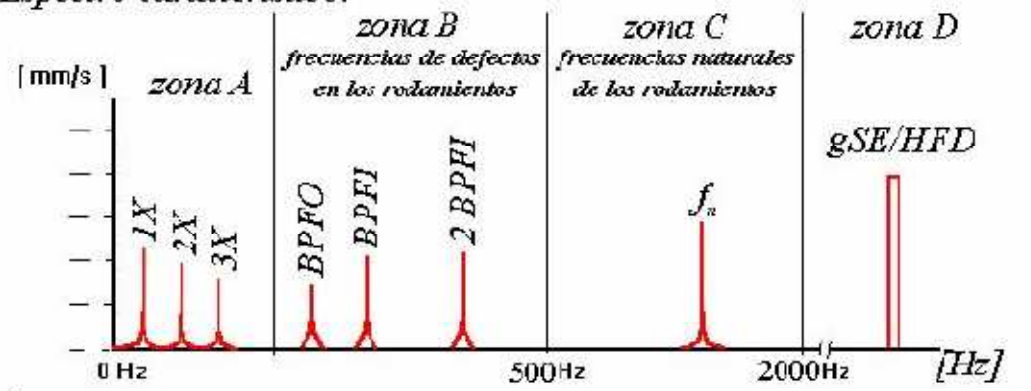


Figura 2.40. Espectro representativo del estado III de la evolución del defecto en el rodamiento.

- Estado III. En este estado, el rodamiento dispone del 2-5 por ciento de vida remanente. Los defectos consisten en picaduras claramente visibles y relativamente profundas. El ruido es evidente y la temperatura se incrementa ligeramente. La respuesta del Spike- Energy continuará incrementándose, duplicándose e incluso triplicándose en amplitud, llegando incluso a valores de 30-50 veces más altos que los se obtenían cuando el rodamiento se colocó nuevo y después de haber realizado el periodo de rodaje de la maquina (Figura 2.40). Por primera vez aparecen frecuencias fundamentales asociadas con los defectos (BPFI, BPFO, BSF y FTF) y, a medida que avanza en el estado 3, van apareciendo armónicos de dichas frecuencias según progresa el desgaste ligeramente alrededor de la periferia de la pista y/o aparecen defectos en más de un elemento rodante.

Normalmente, al principio, las frecuencias de defecto no serán moduladas por la velocidad de rotación, pero según progresa el desgaste, comienzan a aparecer bandas laterales alrededor de las frecuencias de defecto y sus armónicos. Hacia el final del estado 3, aparecerán bandas laterales incluso alrededor de las frecuencias de resonancia. En el final del estado 3, se encuentra el rodamiento en la parte exponencial de su curva de desgaste, por lo que la velocidad de desgaste es impredecible y su duración estará condicionada por las condiciones de funcionamiento tales como la lubricación, las cargas, temperatura, etc.

Mejorar la lubricación en este extremo disminuye momentáneamente el nivel global de vibración (reducción del ruido), pero volverá a niveles normales a las 12-24 horas. La adición de un exceso de lubricante es contraproducente y podría acelerar el fallo. Llegados a este punto, debería reemplazarse el rodamiento.

Espectro característico:

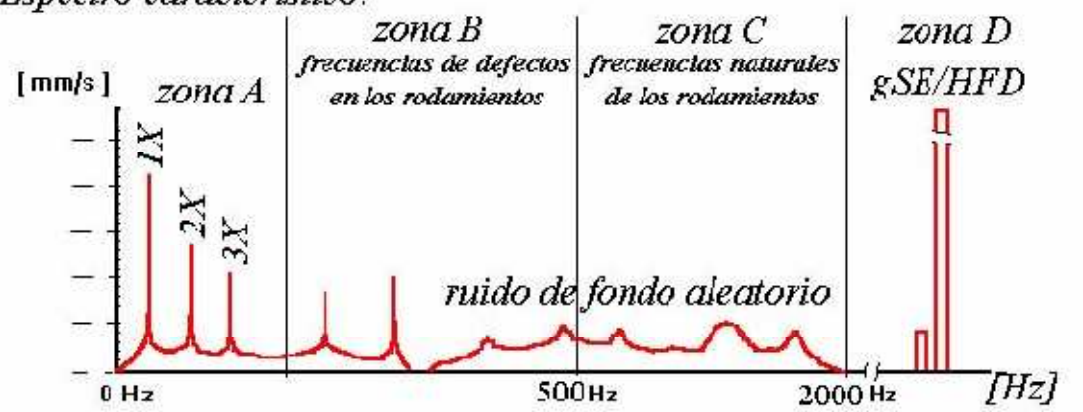


Figura 2.41. Espectro representativo del estado IV de la evolución del defecto en el rodamiento.

- Estado IV. El rodamiento se acerca a la situación de fallo catastrófico o colapso, dispone de una vida remanente de un 1 por ciento. Se puede apreciar en el rodamiento un pronunciado desgaste por toda la periferia de la pista de rodadura. El ruido se incrementa notablemente y hay un significativo aumento de temperatura. En el estado 4, aparecen gran cantidad de bandas laterales a una distancia de 1x r.p.m. alrededor de las frecuencias de defecto. La amplitud de la componente a 1x r.p.m., normalmente, comienza a incrementarse por primera vez a lo largo de todo el proceso descrito, así como sus armónicos 2º y 3º. El nivel de Spike-Energy no se eleva sino que decrece, y las amplitudes de los

2.3 COMPORTAMIENTO VIBRATORIO DEL RODAMIENTO CON DEFECTO LOCALIZADO

armónicos más altos de las frecuencias de defecto y de las de resonancia también decrecerán, tendiendo a "desaparecer 2 son sustituidos por otros armónicos aleatorios (Figura 2.41).

Al final del estado 4, el nivel de Spike-Energy se reduce todavía más y justo antes del colapso crecerá drásticamente hasta valores muy elevados (50-100 gSE). A medida que este estado avanza, comienzan a desaparecer del espectro las frecuencias de defecto y las frecuencias de resonancia, apareciendo muchas componentes a frecuencias aleatorias que se extienden por el espectro y camuflan los picos de las frecuencias discretas. Llegados a este punto, al rodamiento pueden quedarle una hora o una semana de vida, ello depende de diferentes factores operativos.

2.3.4 Factores que modifican las frecuencias de defecto

Los cálculos teóricos realizados para obtener las frecuencias asociadas a cada uno de los defectos, se hacen considerando situaciones ideales. En la realidad sabemos que existen parámetros que hacen que el comportamiento del sistema se separe de las condiciones ideales de tal forma que se modificarán las frecuencias de defecto, ya sea mediante un desplazamiento de la misma a un valor cercano, o bien, aumentando los picos, tanto en número como en magnitud, de la vibración.

A continuación se describen algunos de los factores que influyen en el espectro de vibraciones del sistema mecánico:

- La existencia de desequilibrio en el sistema mecánico produce una modulación de las frecuencias de defecto por la frecuencia de desequilibrio (frecuencia de giro del eje).
- Las frecuencias de defecto en los rodamientos dependen del ángulo de contacto del rodamiento. Como este varia con la carga, es de esperar pequeñas variaciones.
- Los defectos en los rodamientos no suelen ser unitarios además, suelen aparecer aleatoriamente sobre las superficies de las pistas de rodadura. Esto implica que los picos debidos al defecto no serán tan pronunciados (puntiagudos), y las pendientes espectrales, antes y después del pico, se harán más suaves, elevándose el nivel general de ruido del espectro. También se observa un incremento de las amplitudes de los armónicos de las frecuencias de defecto, a costa de la amplitud del propio armónico del defecto.
- La interacción en la máquina de múltiples elementos vibrando da lugar a la generación de frecuencias suma y resta de las frecuencias de defecto de los elementos afectados. A veces, la existencia de interferencias eléctricas produce modulaciones con la frecuencia de la red.
- Los pequeños defectos que pueden aparecer fuera del camino de rodadura sólo se apreciarán cuando por ejemplo un desequilibrio en el eje modifique la trayectoria de la bola sobre el camino de rodadura, y, entonces, el elemento rodante pase sobre el defecto.

Capítulo 3

Modelo cinemático-dinámico del rodamiento

3.1 Cinemática y dinámica de los rodamientos

Un rodamiento diseñado para soportar carga radial está compuesto por un anillo interno solidario al árbol o eje, un anillo externo unido al soporte del rodamiento y un conjunto de elementos rodantes entre ambos anillos. Con la finalidad de mantener los elementos rodantes separados para evitar que entren en contacto entre sí se instalan jaulas, que rotan junto con los elementos rodantes alrededor del eje del rodamiento.

Para el estudio cinemático, se considerará que todos los elementos móviles del rodamiento presentan movimiento plano (sólo cargas radiales). Al girar el rotor unido al anillo interno, causa el giro de los elementos rodantes en un movimiento complejo, aunque para el estudio cinemático puede aproximarse su movimiento al compuesto por una traslación alrededor del eje y otro girando sobre sí mismas (a semejanza de los planetas), rodando sobre la pista del rodamiento. La velocidad de rotación del elemento rodante sobre sí mismo y la de rotación de estos respecto al eje del rodamiento puede obtenerse según se detalla en la figura 3.2:

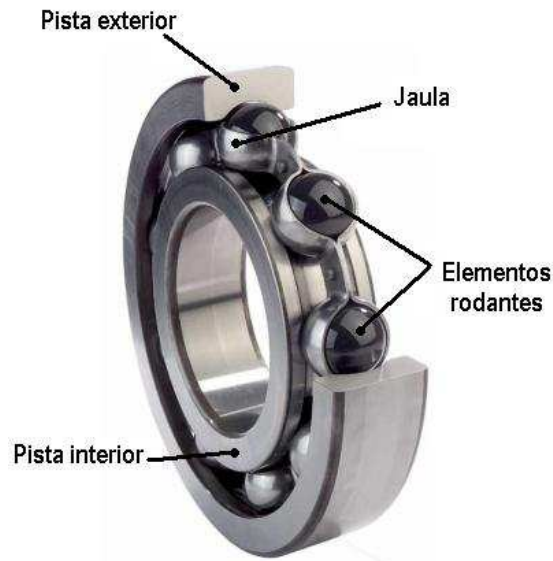


Figura 3.1. Esquema de las principales partes constitutivas de un rodamiento.

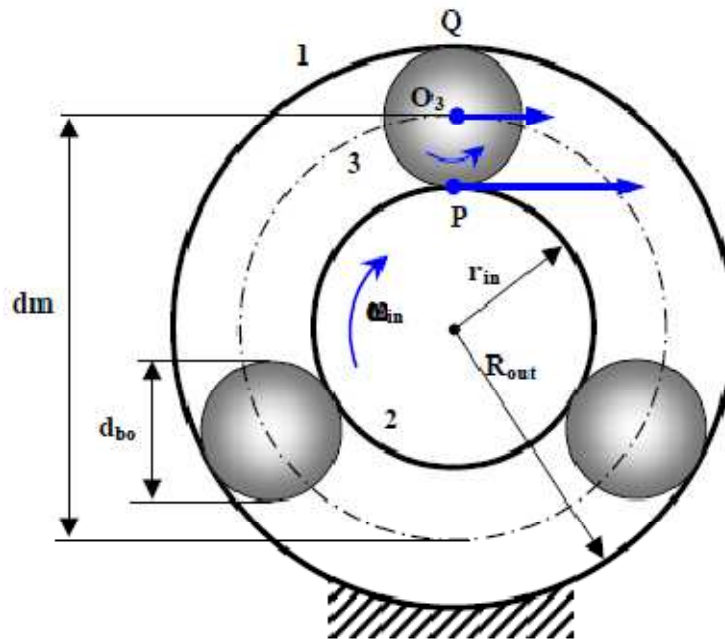


Figura 3.2. Diagrama del comportamiento cinemático de un rodamiento.

El modelo de rodamiento que se va a implementar considera que el anillo externo se encuentra fijo y el anillo interior gira con una velocidad angular ω_{in} . Debido a que estamos hablando de un caso de movimiento plano, se considera que no existe ángulo de contacto α . La velocidad del punto 'P' vale:

$$V_{P2} = \omega_{in} \cdot r_{in} \quad (3.1)$$

Considerando que existe rodadura pura entre los elementos 2 y 3, se tiene que:

$$V_{P2} = V_{P3} \quad (3.2)$$

Por existir rodadura entre los elementos 1 y 3, la velocidad del punto 'Q' es igual a cero. Q es el centro instantáneo de rotación del elemento 3 sobre el elemento 1.

3.1 CINEMÁTICA Y DINÁMICA DE LOS RODAMIENTOS

La velocidad del punto O_3 es la velocidad media de los puntos 'P' y 'Q':

$$V_{O3} = V_m = \frac{V_{P3} + V_{Q3}}{2} = \frac{V_{P3}}{2} \quad (3.3)$$

Al estar unido el movimiento de la jaula al del centro de las bolas, la velocidad tangencial de ambos es V_{O3} . Ésta equivale a una velocidad angular $\omega_{O3/O2}$, alrededor del eje del rodamiento O_2 :

$$\begin{aligned} \omega_{O3/O2} &= \frac{V_{O3}}{r_{in} + r_{bo}} = \frac{V_{P3/2}}{r_{in} + r_{bo}} = \frac{\omega_{in} \cdot r_{in}}{2 \cdot (r_{in} + r_{bo})} \\ \omega_{O3/O2} &= \omega_{jaula} = \frac{\omega_{in} \cdot r_{in}}{2 \cdot (r_{in} + r_{bo})} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Para calcular la velocidad angular de los elementos rodantes sobre su propio eje $\omega_{3/O3}$, comenzamos planteando la ecuación de velocidades relativas:

$$\overrightarrow{V_{P3}} = \overrightarrow{V_{O3}} + \overrightarrow{V_{P3/O3}} \quad (3.5)$$

Teniendo en cuenta que:

$$V_{P2} = V_{P3} = \omega_{in} \cdot r_{in}$$

$$V_{O3} = \frac{V_{P3}}{2} = \frac{\omega_{in} \cdot r_{in}}{2}$$

$$V_{P3/O3} = \omega_{3/O3} \cdot r_{bo}$$

Resulta:

$$\omega_{in} \cdot r_{in} = \frac{\omega_{in} \cdot r_{in}}{2} + \omega_{3/O3} \cdot r_{bo}$$

Despejando:

$$\omega_{3/O2} = \omega_{bola} + \frac{\omega_{in} \cdot r_{in}}{2 \cdot r_{bo}} \quad (3.6)$$

La transmisión de la carga de un anillo a otro se realiza a través de los elementos rodantes. El número de ciclos de presión de un punto de la pista de rodadura sobre el que actúa un elemento rodante cargado tiene una influencia muy importante en el funcionamiento y la vida de un rodamiento. Además de la carga externa que soporta el rodamiento, las fuerzas centrífugas y los momentos giroscópicos de los elementos rodantes contribuyen en un aumento de la distribución de carga sobre los elementos rodantes.

El estudio dinámico se realiza bajo la hipótesis de que el rodamiento solamente soporta carga radial. De hecho, estos modelos están ideados para soportar cargas radiales y no axiales. Sea el rodamiento mostrado en la Figura 3.3, sometido a la carga Q :

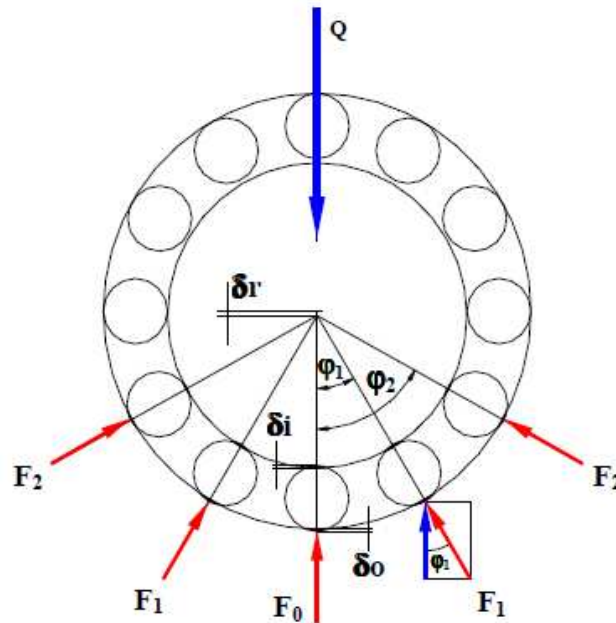


Figura 3.3. Distribución de fuerzas en los elementos rodantes.

La relación genérica carga-desplazamiento relativa en un rodamiento puede ser expresada mediante la ecuación 3.7:

$$\delta_n = K_n \cdot Q^T \quad (3.7)$$

Donde:

- Q , es la carga total aplicada al rodamiento.
- T , es un coeficiente dado que vale $2/3$ para punto de contacto (bolas) y $0,9$ para línea de contacto (cilindro).
- K_n , es un coeficiente que depende del tipo de rodamiento

La deformación total en la dirección del elemento más cargado (Figura 3.3), viene dada por:

$$\delta_r = \delta_i + \delta_o \quad (3.8)$$

Donde:

- δ_i es la deformación entre el elemento rodante y la pista interna
- δ_o es la deformación entre el elemento rodante y la pista externa

Supongamos un rodamiento sin holgura sometido a una carga radial Q de tal forma que un elemento rodante queda bajo la dirección de la línea de carga, tal como puede apreciarse en la Figura 3.3. La condición de equilibrio estático viene dada por la ecuación 3.9.

$$Q = F_o + 2 \cdot \sum (F_i \cdot \cos \varphi_i) \quad (3.9)$$

3.1 CINEMÁTICA Y DINÁMICA DE LOS RODAMIENTOS

La desviación elástica en la línea de ángulo φ será:

$$\delta_{\varphi} = \delta_r \cdot \cos(\varphi) \quad (3.10)$$

La relación entre la carga en un elemento rodante y la correspondiente desviación se puede expresar como:

La relación carga-deformación de dos elementos rodantes podemos establecerla a través de la ecuación 3.7, ya que el coeficiente K_n es constante:

$$K_n = \frac{F_O^T}{\delta_r} = \frac{F_{\varphi}^T}{\delta_{\varphi}}$$

Quedando:

$$\frac{F_{\psi}}{F_O} = \sqrt[T]{\frac{\delta_{\psi}}{\delta_r}}$$

Teniendo en cuenta la ecuación 3.10:

$$F_{\psi} = F_O \cdot \sqrt[T]{\cos\varphi}$$

Sustituyendo el valor de F_{ψ} en la ecuación 3.9:

$$Q = F_O + 2 \cdot \sum (F_O \cdot \sqrt[T]{\cos\varphi} \cdot \cos\varphi) \quad (3.11)$$

Operando podemos obtener la expresión que permite calcular el valor de la fuerza que soporta el elemento más cargado F_O .

$$Q = F_O [1 + 2 \cdot \sum (\cos\varphi)^{\frac{T+1}{T}}]$$

$$F_O = \frac{Q}{[1 + 2 \cdot \sum (\cos\varphi)^{\frac{T+1}{T}}]} \quad (3.12)$$

Definiendo el parámetro J_r como:

$$J_r = \frac{[1 + 2 \cdot \sum (\cos\varphi)^{\frac{T+1}{T}}]}{Z} \quad (3.13)$$

Podemos expresar la ecuación 3.12 como:

$$F_O = \frac{Q}{Z \cdot J_r} \quad (3.14)$$

El valor de $1/J_r$ se calcula para los diferentes números Z de elementos rodantes y para los distintos tipos de elementos rodantes. Estos resultados se encuentran tabulados, o graficados, como se muestra a continuación.

Tabla 3.1. Valores de $1/J_r$ para los diferentes número de elementos rodantes.

Elementos rodantes		Número de elementos rodantes						
		6	7	8	10	12	15	20
Tipo	Bolas	4,43	4,34	4,35	4,38	4,36	4,37	4,36
	Rodillos	4,10	4,03	4,07	4,10	4,08	4,07	4,08

Si el rodamiento presenta cierta holgura radial, h_r , la carga se distribuye sobre los elementos rodantes según un factor de distribución de carga, ϵ , siendo:

$$\epsilon = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{h_r}{2 \cdot \delta_r + h_r}\right) \quad (3.15)$$

La deformación sobre la dirección de ángulo φ sería:

$$\delta_\varphi = \left(\delta_r + \frac{h_r}{2}\right) \cdot \cos\varphi - \frac{h_r}{2} = \delta_r \cdot \left[1 - \frac{1}{2 \cdot \epsilon} \cdot (1 - \cos\varphi)\right] \quad (3.16)$$

Si en la ecuación 3.16 ponemos $\delta_\varphi = 0$, se puede hallar la extensión angular de la zona de carga en el rodamiento, φ_L . Esto puede expresarse como:

$$\varphi_L = \arccos\left(\frac{h_r}{2 \cdot \delta_r + h_r}\right) \quad (3.17)$$

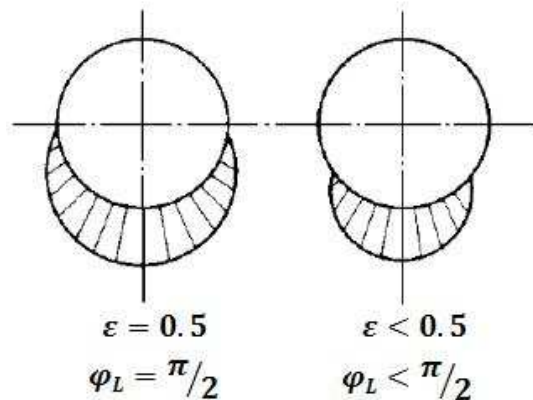


Figura 3.4. Distribución de la carga en un rodamiento con distintos valores de holguras.

De la ecuación 3.17 se deduce que:

- Si no hay holgura ($h_r = 0$) entonces el factor de distribución de carga es $\epsilon = 0,5$ y la extensión angular $\varphi_L = \pi/2$.
- Si $h_r > 0$ (holgura), entonces $\epsilon < 0,5$ y $\varphi_L < \pi/2$.
- Si $h_r < 0$ (montaje con apriete), entonces $\epsilon > 0,5$ y $\varphi_L > \pi/2$.
- Si $\varphi_L = 360^\circ/Z$ sólo estará cargado un elemento rodante.

3.1 CINEMÁTICA Y DINÁMICA DE LOS RODAMIENTOS

Sustituyendo en las ecuaciones anteriores se deduce la expresión de la carga en el elemento rodante con ángulo φ como:

$$F_{\varphi} = F_0 \cdot \left[1 - \frac{1}{2 \cdot \varepsilon} \cdot (1 - \cos \varphi)\right]^{\frac{1}{T}} \quad (3.18)$$

Utilizando la ecuación de equilibrio da la siguiente expresión:

$$Q = Z \cdot F_0 \cdot \frac{\sum \left[1 - \frac{1}{2 \cdot \varepsilon} \cdot (1 - \cos \varphi)\right]^{\frac{1}{T}} \cdot \cos \varphi}{Z} = Z \cdot F_0 \cdot J_r(\varepsilon) \quad (3.19)$$

El factor $J_r(\varepsilon)$ expresado en forma integral quedaría:

$$J_r(\varepsilon) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\varphi_L}^{\varphi_L} \left[1 - \frac{1}{2 \cdot \varepsilon} \cdot (1 - \cos \varphi)\right]^{\frac{1}{T}} \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi \quad (3.20)$$

Dados los parámetros geométricos internos, la holgura radial y la carga radial de un rodamiento, entonces se podrá determinar el valor de la carga de contacto en los elementos rodantes.

Sabiendo que el valor de la integral de $J_r(\varepsilon)$ está relacionado con δ_r y éste es necesario para calcular $J_r(\varepsilon)$, es necesario recurrir a un proceso iterativo para obtener la carga de los elementos rodantes.

Los valores de $J_r(\varepsilon)$ son representados en gráficas como la de la Figura 3.5. En la citada gráfica se representa la evolución del factor $J_r(\varepsilon)$ en función del valor de ε (la curva *a* para rodamientos de bolas y la curva *b* para rodamientos de cilindros).

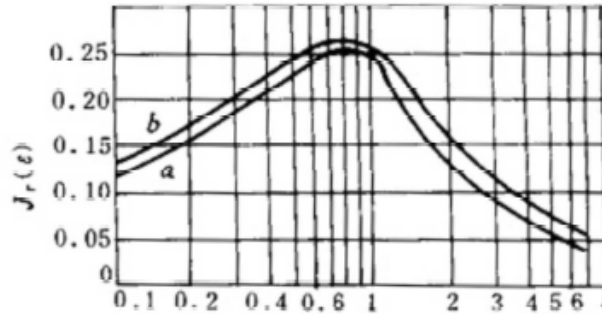


Figura 3.5. Gráfica de la integral $J_r(\varepsilon)$ en función de ε y b .

3.2 Modelo de 2 G.D.L.

3.2.1 Ecuaciones cartesianas

Se considera en este caso que la distancia radial del centro de las bolas al origen del sistema de referencia situado en el centro del anillo externo es constante, quedando libre el conjunto rotor-anillo interno en sus coordenadas x e y . Para averiguar las características vibratorias, el modelado del rodamiento puede realizarse considerándolo como un sistema masa-muelle-amortiguamiento.

La deformación elástica entre las pistas de rodadura y los elementos rodantes presenta una relación fuerza-deformación no lineal, que se obtiene aplicando la teoría de Hertz. En ella se enuncia que en lugar de existir únicamente contacto en un punto (bolas) o en una línea (rodillos), que provocaría una tensión infinita, el material se deforma hasta que se consigue una superficie de contacto capaz de soportar las fuerzas que se ejercen. Se asume que:

- La deformación se produce dentro del límite elástico del material.
- La carga es perpendicular a la superficie, despreciando las tensiones cortantes.
- Las dimensiones del área de contacto son muy pequeñas comparadas con el radio de curvatura de los elementos cargados, y con el radio del área de contacto.
- El área de contacto tiene forma de elipsoide de revolución.

La consecuencia de esta teoría es que la tensión es máxima no en la superficie de contacto, sino bajo ella, y coincidente con el centro del elipsoide, tal y como muestra la figura siguiente.

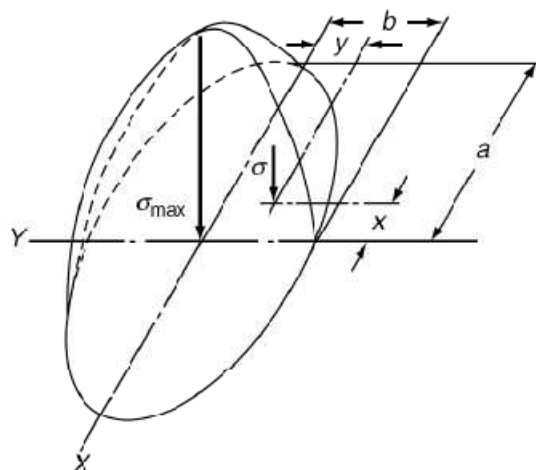


Figura 3.6. Elipsoide representativo de las tensiones según la teoría de Hertz.

La experimentación ha demostrado que estas tensiones de Hertz, al hacerse cíclicas, producen fatiga en puntos bajo la superficie de contacto, que terminan produciendo fisuras y generando defectos en las pistas de rodadura y en los elementos rodantes.

En el modelado matemático, el rodamiento es considerado como un sistema masa-muelle-amortiguamiento y las bolas actúan como resortes no lineales, tal como muestra la Figura 3.7. Ya que las fuerzas hertzianas actúan únicamente cuando existe contacto de la bola con la pista interna o externa, los resortes actúan únicamente a compresión. Cuando la bola se encuentra separada de la pista de rodadura, la fuerza de contacto es cero. A continuación, se muestra el proceso a seguir para el cálculo de las constantes de rigidez entre las pistas del rodamiento y elementos rodantes del tipo bola, que serán necesarias para calcular las fuerzas de contacto según la ecuación 3.31.

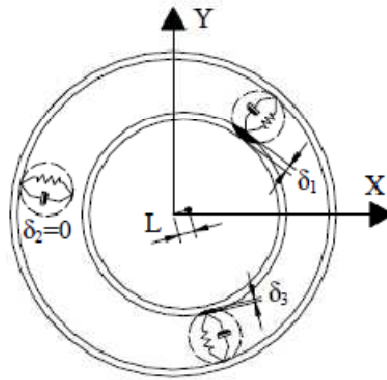


Figura 3.7. Modelo masa-muelle-amortiguamiento del rodamiento.

En primer lugar, necesitamos conocer el valor de las constantes de resorte en los contactos bola-anillo interno, C_{in} y bola-anillo externo, C_{out} . El contacto entre la bola y la pista de rodadura se desarrolla en un área de contacto que tiene la forma de una elipse con a y b como el semieje mayor y semieje menor respectivamente, como indica la teoría de Hertz. Para obtener la fuerza de contacto en la bola, es necesario calcular la curvatura suma y curvatura diferencia.

La curvatura suma se expresa como:

$$\sum \rho = \rho_{11} + \rho_{12} + \rho_{21} + \rho_{22} = \frac{1}{r_{11}} + \frac{1}{r_{12}} + \frac{1}{r_{21}} + \frac{1}{r_{22}} \quad (3.21)$$

Donde r_{ij} denotan los radios de curvatura de las superficies de contacto según dos planos xz e yz que se cortan formando un ángulo de 90° y cuya recta de corte pasa por el punto de contacto. La curvatura diferencia $F(\rho)$ viene dada por:

$$F(\rho) = \frac{(\rho_{11} - \rho_{12}) + (\rho_{21} - \rho_{22})}{\sum \rho} \quad (3.22)$$

Estas ecuaciones hay que particularizarlas para el contacto bola-anillo interno y bola-anillo externo, teniendo en cuenta que cuando la superficie es cóncava en el punto de contacto, el radio de curvatura es negativo. La Figura 3.9 muestra las principales dimensiones del rodamiento de bolas 6206 que van a ser utilizadas para realizar los cálculos.

CAPÍTULO 3: MODELO CINEMÁTICO-DINÁMICO DEL RODAMIENTO

Se comienzan los cálculos para el contacto bola-anillo interno. La Figura 3.8 muestra los parámetros de curvatura correspondientes a este contacto sobre los planos xz , yz .

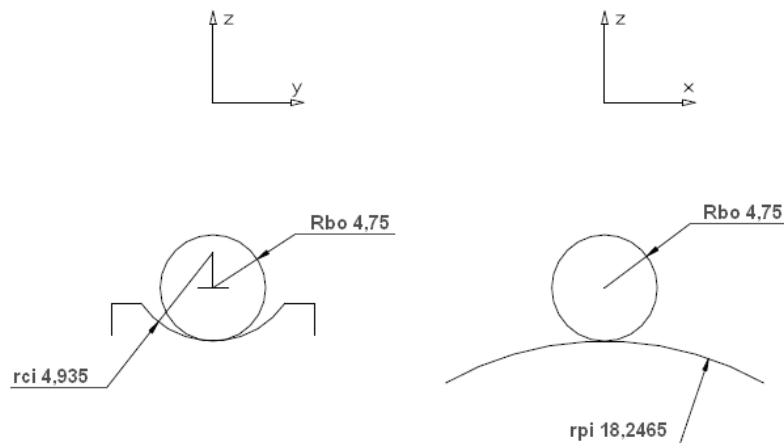


Figura 3.8. Radios de curvatura en el contacto bola-anillo interior.

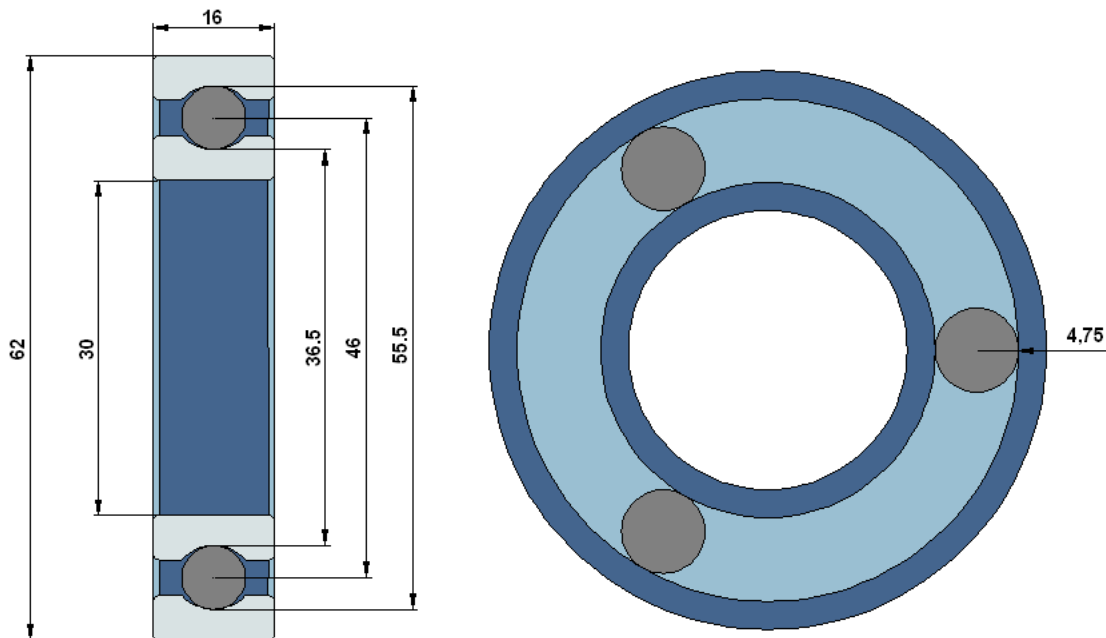


Figura 3.9. Dimensiones del rodamiento de bolas 6206.

Curvatura suma para el contacto anillo interno- elemento rodante, aplicando la ecuación 3.21:

$$\sum \rho = \frac{1}{4.75} + \frac{1}{4.75} + \frac{1}{18.25} + \frac{1}{-4.935} = 0.2732 \text{ mm}^{-1}$$

Curvatura diferencia para el contacto anillo interno- elemento rodante, aplicando la ecuación 3.22:

$$F(\rho) = \frac{\left(\frac{1}{4.75} - \frac{1}{4.75}\right) + \left(\frac{1}{18.25} - \frac{1}{-4.935}\right)}{0.2732} = 0.9423$$

Conociendo el valor de la curvatura diferencia, se pueden obtener los parámetros a^* , b^* y δ^* , a partir del gráfico de la Figura 3.10. Estos valores permiten conocer los valores de deformación y tensión normal máxima para una carga determinada.

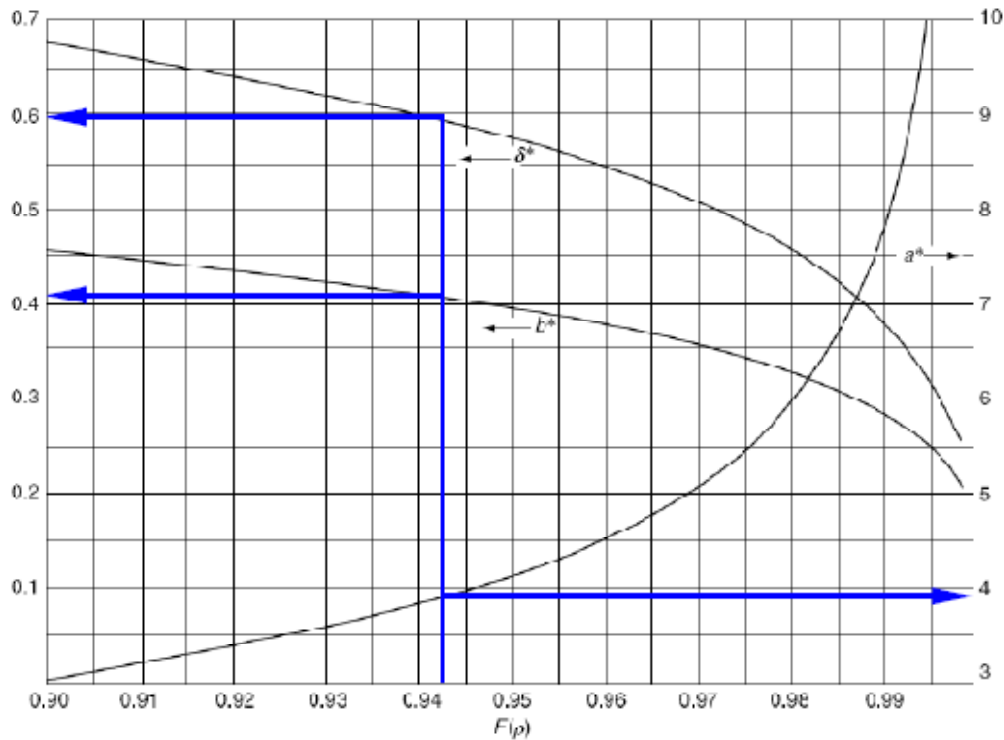


Figura 3.10. Obtención de los parámetros a^* , b^* y δ^* para el contacto bola-pista interior.

Tabla 3.2. Valores de a^* , b^* y δ^* para el contacto bola-pista interior.

a^*	b^*	δ^*
3.85	0.41	0.59

Para un área de contacto elíptica, el esfuerzo máximo se da en el centro geométrico de la elipse de contacto. La magnitud de este esfuerzo es:

$$\sigma_{max} = \frac{3 \cdot Q}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot b} \quad (3.23)$$

Siendo Q la fuerza exterior aplicada. Para rodamientos de acero, los valores de los semiejes mayor y menor de la elipse vienen dados por:

$$a = 0.0236 \cdot a^* \cdot \left(\frac{Q}{\sum \rho}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.24)$$

$$b = 0.0236 \cdot b^* \cdot \left(\frac{Q}{\sum \rho}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.25)$$

Para los que, sustituyendo los valores obtenidos:

$$a = 0.14 \cdot Q^{\frac{1}{3}}$$

$$b = 0.0149 \cdot Q^{\frac{1}{3}}$$

Conocidos los valores de a y b , se calcula la tensión máxima a partir de la ecuación 3.23:

$$\sigma_{max} = \frac{3 \cdot Q}{2 \cdot \pi \cdot 0.14 \cdot Q^{\frac{1}{3}} \cdot 0.0149 \cdot Q^{\frac{1}{3}}} = 228.89 \cdot Q^{\frac{1}{3}}$$

La relación carga-deformación, viene dada, para rodamientos de acero, por la expresión:

$$\delta = 2,79 \cdot 10^{-4} \cdot \delta^* \cdot Q^{\frac{2}{3}} \cdot (\sum \rho)^{\frac{1}{3}} \quad (3.26)$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$\delta = 1,0681 \cdot 10^{-4} \cdot Q^{\frac{2}{3}}$$

Despejando la Q , se obtiene una expresión similar a la ecuación 3.31:

$$Q = \left(\frac{\delta}{1,0681 \cdot 10^{-4}} \right)^{\frac{3}{2}} = 905.890 \cdot \delta^{\frac{3}{2}}$$

Por lo tanto, podemos considerar que $C_{in} = 905.890 \text{ N} \cdot \text{mm}^{3/2}$

Para obtener el valor de C_{out} se deben realizar los mismos cálculos para el contacto bola- pista externa.

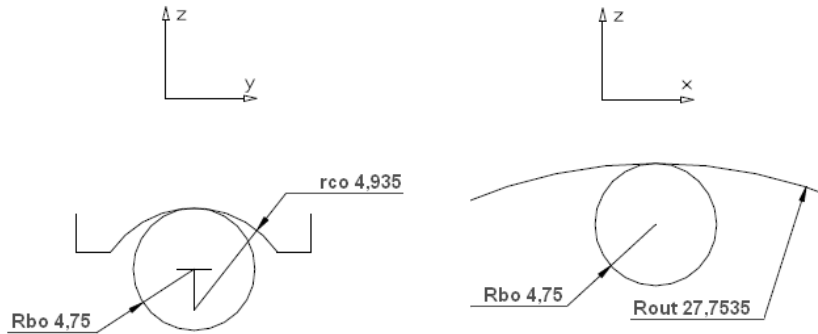


Figura 3.11. Radios de curvatura en el contacto bola-anillo exterior.

Curvatura suma para el contacto anillo interno- elemento rodante, aplicando la ecuación 3.21:

$$\sum \rho = \frac{1}{4.75} + \frac{1}{4.75} + \frac{1}{-27.75} + \frac{1}{-4.935} = 0,1823 \text{ mm}^{-1}$$

Curvatura diferencia para el contacto anillo interno- elemento rodante, aplicando la ecuación 3.22:

$$F(\rho) = \frac{\left(\frac{1}{4,75} - \frac{1}{4,75}\right) + \left(\frac{1}{-27,75} - \frac{1}{-4,935}\right)}{0,1823} = 0,9138$$

Conociendo el valor de la curvatura diferencia, se pueden obtener los parámetros a^* , b^* y δ^* , a partir del gráfico de la Figura 3.10. Estos valores permiten conocer los valores de deformación y tensión normal máxima para una carga determinada.

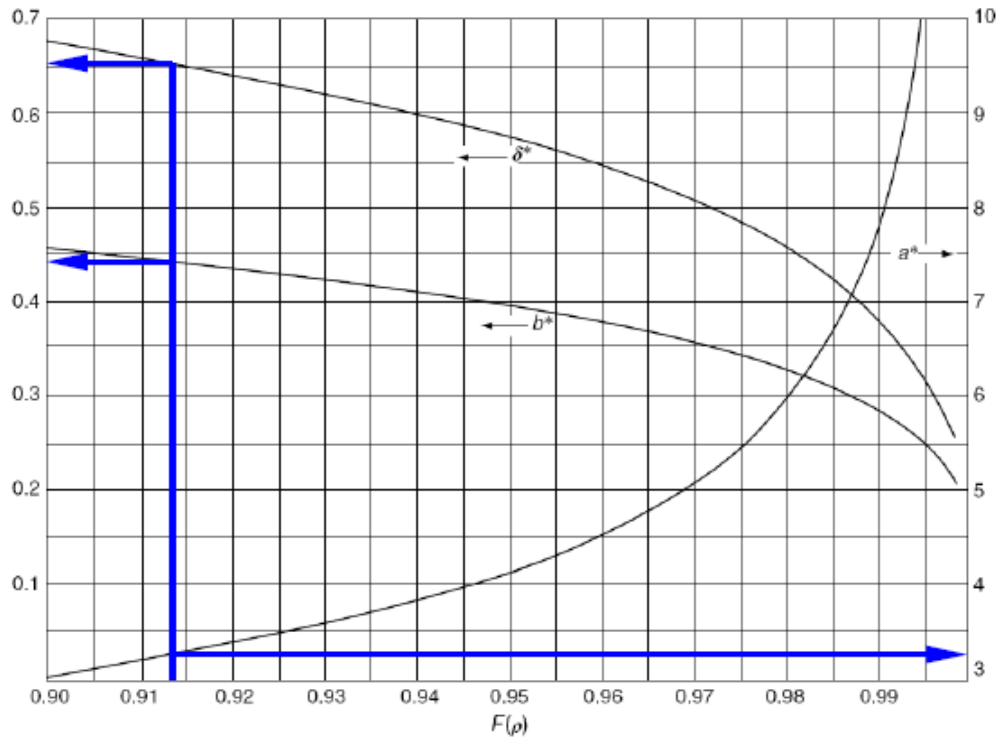


Figura 3.12. Obtención de los parámetros a^* , b^* y δ^* para el contacto bola-pista exterior.

Tabla 3.3. Valores de a^* , b^* y δ^* para el contacto bola-pista exterior.

a^*	b^*	δ^*
3.25	0.445	0.66

Los valores de los semiejes mayor y menor de la elipse, aplicando las ecuaciones 3.24 y 3.25, son:

$$a = 0,1353 \cdot Q^{\frac{1}{3}}$$

$$b = 0,0185 \cdot Q^{\frac{1}{3}}$$

Conocidos los valores de a y b , se calcula la tensión máxima a partir de la ecuación 3.23:

$$\sigma_{max} = \frac{3 \cdot Q}{2 \cdot \pi \cdot 0,1353 \cdot Q^{\frac{1}{3}} \cdot 0,0185 \cdot Q^{\frac{1}{3}}} = 190,75 \cdot Q^{\frac{1}{3}}$$

CAPÍTULO 3: MODELO CINEMÁTICO-DINÁMICO DEL RODAMIENTO

Sustituyendo los valores conocidos en la ecuación de la relación carga-deformación (3.26):

$$\delta = 1,0441 \cdot 10^{-4} \cdot Q^{\frac{2}{3}}$$

Despejando la Q:

$$Q = \left(\frac{\delta}{1,0441 \cdot 10^{-4}} \right)^{\frac{3}{2}} = 937.318 \cdot \delta^{\frac{3}{2}}$$

Por lo tanto, se puede considerar que $C_{out} = 937.318 \text{ N} \cdot \text{mm}^{3/2}$

Existe otro modo de calcular las constantes de rigidez interior y exterior en rodamientos de bolas de acero, que es la utilizada para calcular las constantes de rigidez en el proyecto.

$$C = 2,15 \cdot 10^5 \cdot \sum \rho^{-\frac{1}{2}} \cdot (\delta^*)^{-\frac{3}{2}} \quad (3.27)$$

Esta fórmula otorga valores de las constantes de rigidez ligeramente distintos que los calculados con el método anterior.

$$C_{in} = 805.158 \text{ N} \cdot \text{mm}^{3/2}.$$

$$C_{out} = 872.796 \text{ N} \cdot \text{mm}^{3/2}.$$

El cálculo de las constantes de rigidez para elementos de tipo cilindro obedece a una fórmula diferente, que será comentada en el capítulo siguiente.

Hemos dicho que el contacto elemento rodante- pista de rodadura está modelizado como un conjunto masa- muelle- amortiguamiento. El amortiguamiento fue calculado de forma experimental en la tesis original, obteniéndose un valor de 0.01582 N/mm·s, valor que será utilizado como estándar para las simulaciones.

En la Figura 3.13 se representa el contacto de una bola con los anillos interno y externo. En el centro del anillo externo, que consideramos estacionario, situamos un sistema de referencia global SR. Las posiciones del centro del anillo interno y el centro de la bola 'i' respecto al SR, vienen definidas por los vectores de posición \vec{L}_{in} y \vec{r}_i respectivamente. La posición del centro de la bola 'i' respecto al centro del anillo interno viene determinada por el vector de posición $\vec{\rho}_i$.

Pueden apreciarse, además las constantes de rigidez y el factor de amortiguamiento en los puntos de contacto de la bola con el anillo interno, C_{in} , D_{in} y con el anillo externo C_{out} , D_{out} . Se pretende establecer las ecuaciones del movimiento del conjunto rotor-anillo interno por aplicación de las ecuaciones de la dinámica de Newton según las direcciones de los ejes del sistema de referencia X e Y. Antes de plantear las ecuaciones y para evitar que el modelo matemático resulte excesivamente complejo, se realizan las siguientes hipótesis:

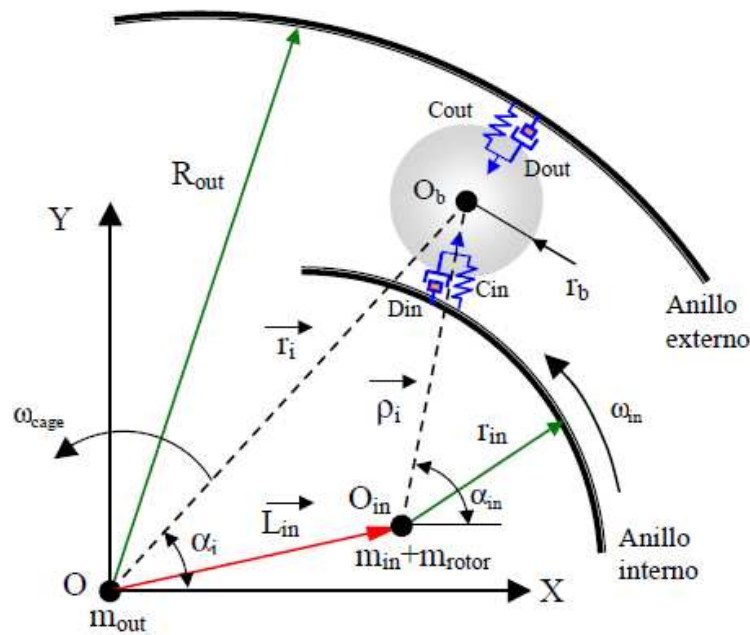


Figura 3.13. Modelo de rodamiento.

- Las deformaciones ocurren como describe la teoría de Hertz.
- Las bolas y rotor presentan un movimiento plano, siendo común a todos los elementos el mismo plano del movimiento (sin ángulo de contacto α).
- La velocidad angular de la jaula es constante.
- Las bolas no tienen velocidad angular de rotación, con lo que sólo se describe el movimiento de traslación.
- Todos los componentes del rodamiento son rígidos.
- El funcionamiento se produce bajo condiciones isotermas, por tanto no se consideran variaciones de dimensiones por efecto de la temperatura.
- No existe deslizamiento entre las bolas y las superficies sobre las que se produce el movimiento.
- La jaula mantiene las bolas equidistantes, por tanto, no existe interacción entre las bolas.
- El centro de las bolas dista del centro del anillo externo una distancia constante.
- Aunque la deformación bola-anillo interno tiene lugar según la dirección de la recta $O_b - O_{in}$, como el ángulo β es muy pequeño (Figura 3.17), supondremos que esta deformación lleva la dirección de la recta $O - O_b$. Por el mismo motivo, supondremos que la fuerza de reacción, F_i , de la bola sobre el anillo interno, lleva la misma dirección $O - O_b$, y se calculan sus componentes utilizando el ángulo α_i de la bola correspondiente. Ésta es una de las simplificaciones clave, ya que elimina un grado de libertad del modelo que aumentaría en exceso su complejidad.

CAPÍTULO 3: MODELO CINEMÁTICO-DINÁMICO DEL RODAMIENTO

Para un modelo con 2 G.D.L, las ecuaciones del movimiento se deducen aplicando las ecuaciones de Newton al diagrama de sólido libre del conjunto rotor-anillo interno. La Figura 3.14 muestra las fuerzas que actúan sobre el anillo interno y son las siguientes:

- Peso del anillo interno y peso del rotor, $(m_{in} + m_{rotor}) \cdot g$
- Una fuerza exterior, Fe_x, Fe_y
- Una fuerza originada por desequilibrio en rotor, Fu
- Las fuerzas debidas a la elasticidad del contacto, Fin_x^i, Fin_y^i

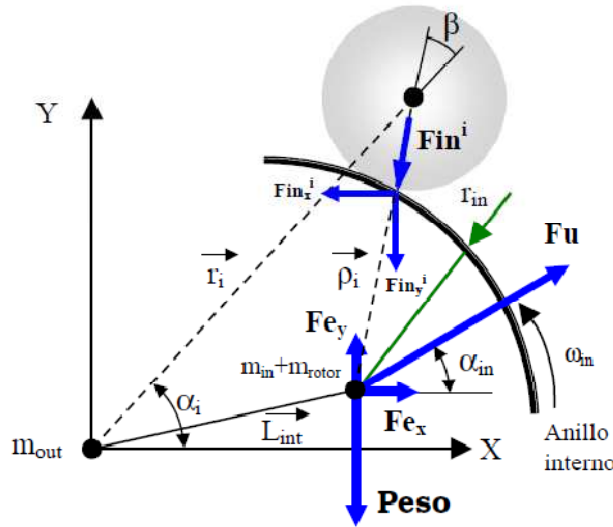


Figura 3.14. Diagrama del sólido libre del anillo interior.

La segunda ley del movimiento de Newton, en coordenadas rectangulares, viene dada por:

$$(m_{in} + m_{rotor}) \cdot \ddot{x} = \sum F_x \quad (m_{in} + m_{rotor}) \cdot \ddot{y} = \sum F_y \quad (3.28)$$

Para simplificar el modelo y puesto que el ángulo β es muy pequeño (del orden de 1° en el caso más desfavorable), se calculan las componentes de la fuerza de contacto de cada bola Fin_x^i y Fin_y^i utilizando el ángulo de posición de la misma α_i .

En la dirección x , se tiene:

$$(m_{in} + m_{rotor}) \cdot \ddot{x} = Fe_x + Fu \cdot \cos(\alpha_{in}) - \sum_{i=1}^3 Fin_i \cdot \cos(\alpha_i) \quad (3.29)$$

En la dirección y , se tiene:

$$(m_{in} + m_{rotor}) \cdot \ddot{y} = Fe_y + Fu \cdot \sin(\alpha_{in}) - \sum_{i=1}^3 Fin_i \cdot \sin(\alpha_i) - (m_{in} + m_{rotor}) \cdot g \quad (3.30)$$

La fuerza de reacción sobre el anillo interno, originada por el contacto entre las bolas y los anillos interno/externo, depende de las constantes de rigidez C_{in} y C_{out} calculadas anteriormente, y de la posición del centro del anillo interno respecto al centro del anillo

externo, donde se encuentra situado el sistema de referencia global. Esta viene dada por el vector de posición \vec{L}_{in} .

Teniendo en cuenta la teoría de contacto de Hertz, la relación entre la fuerza de contacto y la deformación, para un rodamiento, viene dada por:

$$F_{in_i} = C \cdot (\delta_i)^{1/T} \quad (3.31)$$

Conociendo la deformación local elemento rodante-anillo, se puede calcular la fuerza de contacto mediante la ecuación 3.31.

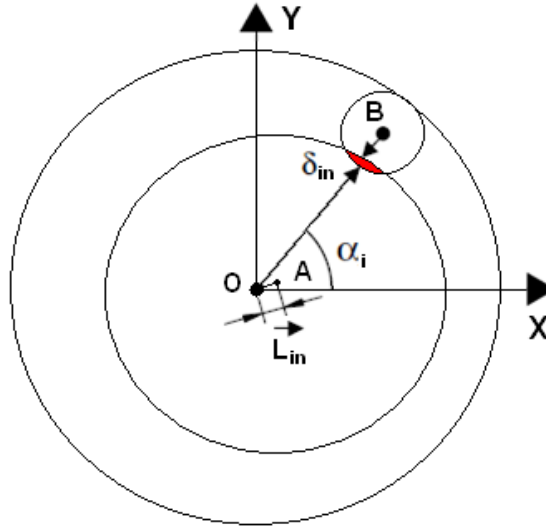


Figura 3.15. Esquema de las deformaciones en el contacto elemento rodante- pista interior.

Cuando el centro del anillo interno abandona el origen de coordenadas y pasa a la posición A , de coordenadas $(x; y)$, sobre la bola $_i$, que ocupa una posición angular α_i , se produce una deformación δ_{in} , si el desplazamiento es mayor que la holgura existente. De la Figura 3.15, se deduce que:

$$\begin{aligned} \delta_i &= x_{in} \cdot \cos(\alpha_i) + y_{in} \cdot \sin(\alpha_i) & \text{Si } \delta_i \geq 0 \\ \delta_i &= 0 & \text{Si } \delta_i \leq 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

Anticipándonos a lo que se plantea en el modelo de 2+Z G.D.L., a continuación, se expone otra forma de calcular la deformación δ_{in} . Observando la Figura 3.14 se aprecia que:

$$\vec{r}_i = \vec{L}_{in} + \vec{\rho}_i \quad (3.33)$$

Donde \vec{L}_{in} es la distancia vectorial que existe entre el centro del anillo externo (siempre fijo) y el centro del anillo interno (móvil) y $\vec{\rho}_i$ es la distancia vectorial entre el centro del anillo interno y el centro del elemento rodante.

Como

$$\vec{r}_i = r_i \cdot \cos(\alpha_i) \cdot \vec{i} + r_i \cdot \sin(\alpha_i) \cdot \vec{j} \quad (3.34)$$

$$\vec{L}_{in} = x_{in} \cdot \vec{i} + y_{in} \cdot \vec{j} \quad (3.35)$$

$$\vec{\rho}_i = \rho_i \cdot \cos(\alpha_i) \cdot \vec{i} + \rho_i \cdot \sin(\alpha_i) \cdot \vec{j} \quad (3.36)$$

Agrupando según las direcciones \vec{i} y \vec{j} , se tiene:

$$\begin{aligned} r_i \cdot \cos(\alpha_i) &= x_{in} + \rho_i \cdot \cos(\alpha_i) \\ r_i \cdot \sin(\alpha_i) &= y_{in} + \rho_i \cdot \sin(\alpha_i) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Para eliminar el ángulo α_{in} , se despejan, en las ecuaciones 3.37, los términos que contienen este valor, se elevan al cuadrado ambas ecuaciones y se suman.

$$\begin{aligned} \rho_i \cdot \cos(\alpha_i) &= x_{in} - r_i \cdot \cos(\alpha_i) \\ \rho_i \cdot \sin(\alpha_i) &= y_{in} - r_i \cdot \sin(\alpha_i) \end{aligned} \quad (3.38)$$

Elevando al cuadrado y desarrollando:

$$\begin{aligned} \rho_i^2 \cdot \cos^2(\alpha_{in}) &= x_{in}^2 + r_i^2 \cdot \cos^2(\alpha_i) - 2 \cdot r_i \cdot \cos(\alpha_i) \cdot x_{in} \\ \rho_i^2 \cdot \sin^2(\alpha_{in}) &= y_{in}^2 + r_i^2 \cdot \sin^2(\alpha_i) - 2 \cdot r_i \cdot \sin(\alpha_i) \cdot y_{in} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Sumando queda, finalmente:

$$\rho_i^2 = r_i^2 + x_{in}^2 + y_{in}^2 - 2 \cdot r_i \cdot \cos(\alpha_i) \cdot x_{in} - 2 \cdot r_i \cdot \sin(\alpha_i) \cdot y_{in} \quad (3.40)$$

La deformación δ_{in} vale:

$$\delta_{in} = r_{in} + r_{bo} - \rho_i \quad (3.41)$$

Por otro lado, la deformación externa se explica fácilmente con el siguiente esquema:

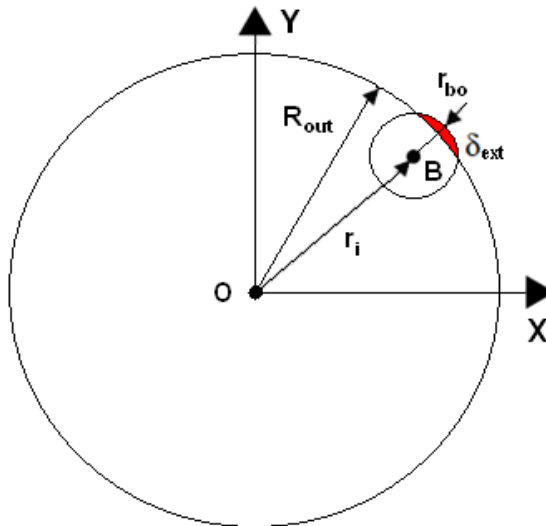


Figura 3.16. Esquema de las deformaciones en el contacto elemento rodante- pista exterior.

Para la deformación de la bola en el contacto con la pista exterior, se toma como referencia el centro absoluto del sistema, el centro del anillo externo, siempre. El parámetro r_i se refiere a la distancia entre dicho punto y el centro del elemento rodante.

Teniendo estos dos parámetros el mismo origen, y con el radio del elemento rodante siempre constante, la condición para la existencia de deformación es la siguiente:

$$\delta_{ex} = R_{out} - r_{bo} - r_i \quad (3.42)$$

Una vez tenemos las deformaciones, aplicando la ecuación 3.31 pueden calcularse las fuerzas de contacto interiores y exteriores.

3.2.2 Ecuaciones diferenciales del movimiento del modelo con 2 G.D.L.

Ecuaciones diferenciales del movimiento. Rodamiento con 3 elementos rodantes

Las ecuaciones 3.43 y 3.44, representan las ecuaciones diferenciales del movimiento del rotor, aplicando la 2ª ley de Newton, cuando el rodamiento tiene únicamente tres elementos rodantes.

En la dirección x , se tiene:

$$(m_{in} + m_{rotor}) \cdot \ddot{x} = Fe_x + Fu \cdot \cos(\alpha_{in}) - \sum_{i=1}^3 Fin_i \cdot \cos(\alpha_i) \quad (3.43)$$

En la dirección y , se tiene:

$$(m_{in} + m_{rotor}) \cdot \ddot{y} = Fe_y + Fu \cdot \sin(\alpha_{in}) - \sum_{i=1}^3 Fin_i \cdot \sin(\alpha_i) - (m_{in} + m_{rotor}) \cdot g \quad (3.44)$$

Ecuaciones diferenciales del movimiento. Rodamiento con 9 elementos rodantes

Las ecuaciones 3.45 y 3.46, representan las ecuaciones diferenciales del movimiento del rotor cuando el rodamiento tiene nueve elementos rodantes.

Para la dirección x , se tiene:

$$(m_{in} + m_{rotor}) \cdot \ddot{x} = Fe_x + Fu \cdot \cos(\alpha_{in}) - \sum_{i=1}^9 Fin_i \cdot \cos(\alpha_i) \quad (3.45)$$

En la dirección y , se tiene:

$$(m_{in} + m_{rotor}) \cdot \ddot{y} = Fe_y + Fu \cdot \sin(\alpha_{in}) - \sum_{i=1}^9 Fin_i \cdot \sin(\alpha_i) - (m_{in} + m_{rotor}) \cdot g \quad (3.46)$$

3.3 Modelo de 2+Z G.D.L.

3.3.1 Modelado del sistema. Ecuaciones de Newton

En el modelo de 2 G.D.L., se ha considerado que la distancia radial del centro de las bolas al origen del sistema de referencia situado en el centro del anillo externo es constante, y solamente el conjunto rotor-anillo interno, queda libre para moverse en el plano. En un intento de reproducir con mayor fidelidad el sistema real, se dotará a cada elemento de un grado de libertad y, de esta forma, la distancia del centro de las mismas al origen de coordenadas ya no será constante, sino variable en el tiempo. Con estas consideraciones, el modelo presenta 2+Z G.D.L., dos correspondientes al anillo interno y uno por cada elemento que tenga el rodamiento. Además, esta ampliación de los G.D.L. del modelo es indispensable para la introducción de defectos.

Se quieren establecer las ecuaciones del movimiento del sistema aplicando las ecuaciones de la dinámica de Newton. Para ello, se representa el diagrama de sólido libre de uno de los elementos rodantes y el anillo interno y se establece la ecuación:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Si se considera que las fuerzas que actúan sobre el conjunto rotor-anillo interno son las mismas que en el modelo de 2 G.D.L. y se modela el sistema bajo las mismas hipótesis, las ecuaciones diferenciales del movimiento son idénticas a las ecuaciones 3.43 y 3.44.

La figura 3.17 muestra las fuerzas que actúan sobre la bola 'i'.

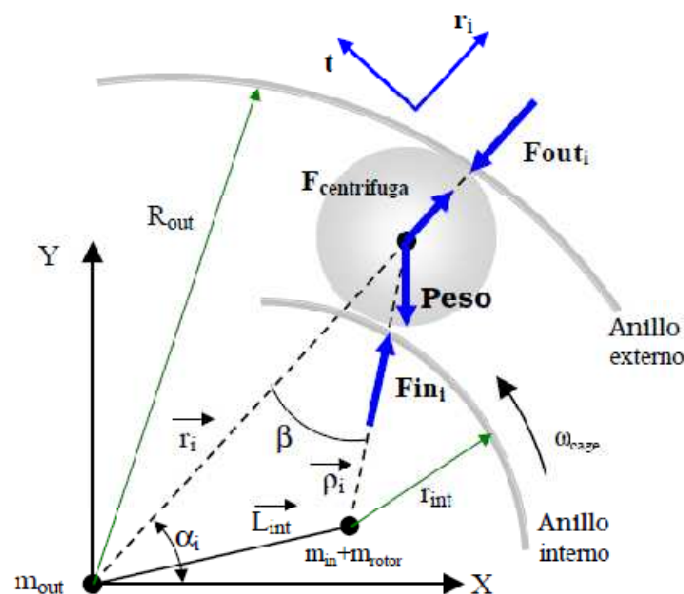


Figura 3.17. Esquema Diagrama del sólido libre sobre un elemento rodante.

Proyectando las fuerzas sobre la dirección r_i , y pasando la componente centrífuga al miembro de la derecha, se tiene que:

$$m_{bo} \cdot \ddot{r}_i = Fin_i \cdot \cos(\beta) + F_{centrifuga} - Peso \cdot \sin(\alpha_i) - Fout_i \quad (3.47)$$

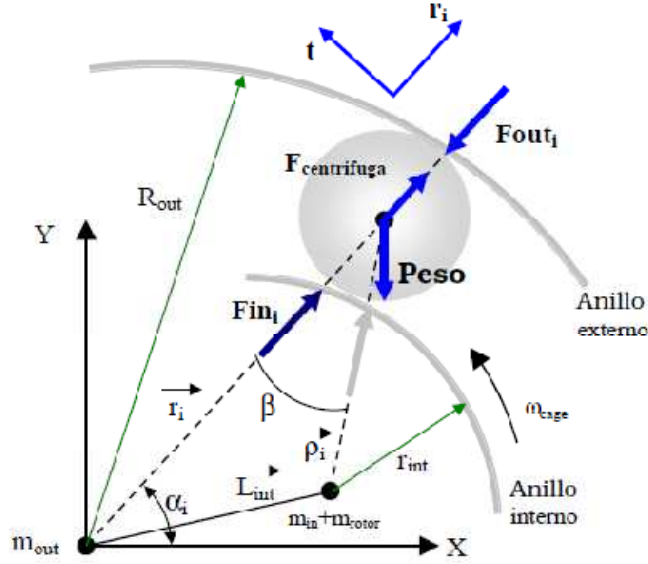


Figura 3.18. Fuerzas sobre el elemento rodante, aplicando la simplificación del ángulo β .

Donde:

- $Fin_i = C_{in} \cdot \delta in_i^{3/2} - D_{in} \cdot \dot{\rho}_i \cdot \Gamma_{in} = C_{in} \cdot (r_{int} + r_{bo} - \rho_i)^{3/2} - D_{in} \cdot \dot{\rho}_i \cdot \Gamma_{in}$
- $F_{centrifuga} = m_{bo} \cdot r_i \cdot \dot{\alpha}_i^2$
- $Peso = m_{bo} \cdot g$
- $Fout_i = C_{out} \cdot \delta out_i^{3/2} + D_{out} \cdot \dot{\rho}_i \cdot \Gamma_{out} = C_{out} \cdot (r_{int} + r_{bo} - R_{out})^{3/2} + D_{out} \cdot \dot{\rho}_i \cdot \Gamma_{out}$

Como el ángulo β es muy pequeño, se puede suponer que la fuerza Fin_i actúa según la dirección de la recta que pasa por el origen de coordenadas y el centro de la bola, tal y como muestra la Figura 3.18.

La ecuación diferencial del movimiento de cada bola, $i = 1, 2, \dots, Z$, queda finalmente:

$$m_{bo} \cdot \ddot{r}_i = C_{in} \cdot \delta in_i^{3/2} - D_{in} \cdot \dot{\rho}_i \cdot \Gamma_{in} - C_{out} \cdot \delta out_i^{3/2} - D_{out} \cdot \dot{\rho}_i \cdot \Gamma_{out} + m_{bo} \cdot r_i \cdot \dot{\alpha}_i^2 - m_{bo} \cdot g \cdot \sin(\alpha_i) \quad (3.48)$$

$$\Gamma_{in} = 0 \quad \text{si } \delta in < 0; \quad \Gamma_{in} = 1 \quad \text{si } \delta in \geq 0$$

$$\Gamma_{out} = 0 \quad \text{si } \delta out < 0; \quad \Gamma_{out} = 1 \quad \text{si } \delta out \geq 0$$

3.3.2 Modelado del sistema. Ecuaciones de Lagrange

En esta sección se pretende obtener las ecuaciones del movimiento a partir de las ecuaciones de Lagrange. El modelado del sistema se realiza bajo las mismas hipótesis contempladas en el modelo de 2 G.D.L. La aplicación de las ecuaciones de Lagrange a los problemas prácticos resulta notablemente sencilla aun cuando se trate de sistemas mecánicos complejos.

El procedimiento de Lagrange se basa en magnitudes escalares como la energía cinética, energía potencial y trabajo virtual. Al tratar los problemas de la dinámica con las ecuaciones de Newton, nos encontramos con fuerzas, velocidades, aceleraciones, etc. todas ellas de carácter vectorial. Las ecuaciones de Lagrange, basadas en magnitudes escalares, tienen en cuenta estas magnitudes vectoriales sin necesidad de recurrir a métodos vectoriales formales, lo que hace que el método de Lagrange sea considerado como más real y exacto. Por ello, la mayoría de estudios se realizan sobre los modelos de Newton, con objeto de compararlos más tarde con el referente que suponen los modelos de Lagrange.

Supongamos un sistema formado por i partículas con j grados de libertad. El número de coordenadas generalizadas, igual al número de grados de libertad, para especificar el movimiento, las denotaremos por:

$$q_1, q_2, q_3 \dots, q_j$$

El vector de posición de la i -ésima partícula puede escribirse como:

$$r_i = f(q_1, q_2, q_3 \dots, q_j)$$

Las ecuaciones del movimiento se obtienen mediante la ecuación de Lagrange para un conjunto de coordenadas generalizadas. Si el sistema es no conservativo y por tanto existen fuerzas disipativas, podemos escribir la ecuación de Lagrange en su forma más general como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta Ec}{\delta \dot{q}_j} \right) - \frac{\delta Ec}{\delta q_j} + \frac{\delta Ep}{\delta q_j} + \frac{\delta D}{\delta \dot{q}_j} = Q'_j \quad (3.49)$$

donde D es la función de disipación de Rayleigh y Q'_j es la fuerza generalizada no conservativa, tal como el rozamiento.

Si se comparan las formas de la energía cinética, Ec , energía potencial elástica, Ep , y la función de disipación, D , para un sistema con 1 grado de libertad, se tiene:

$$Ec = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{q}_1^2 ; \quad Ep = \frac{1}{2} \cdot C \cdot q_1^2 ; \quad D = \frac{1}{2} \cdot D' \cdot \dot{q}_1^2 \quad (3.50)$$

donde C es el coeficiente de rigidez (considerado según la ley de Hooke $F = C \cdot x$) y D' es el coeficiente de amortiguamiento.

La energía cinética y energía potencial total del sistema, pueden obtenerse sumando las energías de los distintos componentes. Así, la energía cinética total, viene dada por:

$$Ec_T = Ec_{rotor} + Ec_{Ainterno} + Ec_{Aexterno} + \sum_{i=1}^{Z_{bolas}} Ec_{bola} \quad (3.51)$$

La energía potencial total viene dada por:

$$Ep_T = Ep_{rotor} + Ep_{Ainterno} + Ep_{Aexterno} + \sum_{i=1}^{Z_{bolas}} Ep_{bola} + \sum_{i=1}^{Z_{bolas}} Ep_{bola} \quad (3.52)$$

Si se considera que además existe amortiguamiento cuando se produce el contacto de las bolas con el anillo interno o el anillo externo, la función de disipación de Rayleigh viene dada por:

$$D_T = \sum_{i=1}^{Z_{bolas}} D_{contacto} \quad (3.53)$$

Con lo que se dispone de un sistema de 2+Z grados de libertad. A continuación se detallan las ecuaciones de cada uno de los componentes que integran el rodamiento.

Anillo Interno

Comenzamos calculando la energía cinética del anillo interno. El vector de posición del centro de masas del anillo interno respecto al sistema de referencia global, viene dado por:

$$\vec{L}_{in} = x_{in} \cdot \vec{i} + y_{in} \cdot \vec{j} \quad (3.54)$$

El valor de la energía cinética se obtiene de forma:

$$Ec_{Ainterno} = \frac{1}{2} \cdot m_{in} (\vec{L}_{in} \cdot \vec{L}_{in}) + \frac{1}{2} \cdot I_{in} \cdot \dot{\alpha}_{in}^2 \quad (3.55)$$

La velocidad se obtiene derivando respecto al tiempo el vector de posición:

$$\dot{\vec{L}}_{in} = \dot{x}_{in} \cdot \vec{i} + \dot{y}_{in} \cdot \vec{j} \quad (3.56)$$

En consecuencia:

$$Ec_{Ainterno} = \frac{1}{2} \cdot m_{in} (\dot{x}_{in}^2 + \dot{y}_{in}^2) + \frac{1}{2} \cdot I_{in} \cdot \dot{\alpha}_{in}^2 \quad (3.57)$$

Tomando como referencia de energía potencial el centro de la pista externa, (origen de coordenadas), la energía potencial de la pista interna viene dada por:

$$Ep_{Ainterno} = m_{in} \cdot g \cdot h_{in} = m_{in} \cdot g \cdot y_{in} \quad (3.58)$$

Halladas las expresiones de energía cinética y energía potencial, los términos de la ecuación de Lagrange se obtienen derivando respecto a las coordenadas generalizadas ($x_{in}, y_{in}, r_i, \dots, r_b, \dots, r_z$) y sus derivadas respecto al tiempo ($\dot{x}_{in}, \dot{y}_{in}, \dot{r}_1, \dots, \dot{r}_b, \dots, \dot{r}_z$) las

expresiones de energía cinética, energía potencial y la función de disipación cuando esta exista.

En nuestro caso, para el anillo interno se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta Ec}{\delta \dot{x}_{in}}\right) &= \frac{d}{dt}(m_{in} \cdot \dot{x}_{in}) = m_{in} \cdot \dot{x}_{in}; & \frac{\delta Ec}{\delta x_{in}} &= 0; & \frac{\delta Ec}{\delta \dot{x}_{in}} &= 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta Ec}{\delta \dot{y}_{in}}\right) &= \frac{d}{dt}(m_{in} \cdot \dot{y}_{in}) = m_{in} \cdot \dot{y}_{in}; & \frac{\delta Ec}{\delta y_{in}} &= 0; & \frac{\delta Ep}{\delta x_{in}} &= m_{in} \cdot g \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta Ec}{\delta \dot{r}_{in}}\right) &= 0_{i=1,2,\dots,Z}; & \frac{\delta Ec}{\delta r_i} &= 0_{i=1,2,\dots,Z}; & \frac{\delta Ep}{\delta r_i} &= 0_{i=1,2,\dots,Z}\end{aligned}\quad (3.59)$$

Rotor

Al ser solidario el rotor y el anillo interno, ambos presentan el mismo movimiento y posición, por lo que presentan expresiones similares para energía cinética y energía potencial.

$$Ec_{rotor} = \frac{1}{2} \cdot m_{rotor}(\dot{x}_{in}^2 + \dot{y}_{in}^2) + \frac{1}{2} \cdot I_{rotor} \cdot \dot{\alpha}_{in}^2 \quad (3.60)$$

$$Ep_{rotor} = m_{rotor} \cdot g \cdot h_{in} = m_{rotor} \cdot g \cdot y_{in} \quad (3.61)$$

Los términos para la ecuación de Lagrange para el rotor tiene:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta Ec}{\delta \dot{x}_{in}}\right) &= \frac{d}{dt}(m_{rotor} \cdot \dot{x}_{in}) = m_{rotor} \cdot \dot{x}_{in}; & \frac{\delta Ec}{\delta x_{in}} &= 0; & \frac{\delta Ec}{\delta \dot{x}_{in}} &= 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta Ec}{\delta \dot{y}_{in}}\right) &= \frac{d}{dt}(m_{rotor} \cdot \dot{y}_{in}) = m_{rotor} \cdot \dot{y}_{in}; & \frac{\delta Ec}{\delta y_{in}} &= 0; & \frac{\delta Ep}{\delta x_{in}} &= m_{rotor} \cdot g \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta Ec}{\delta \dot{r}_{in}}\right) &= 0_{i=1,2,\dots,Z}; & \frac{\delta Ec}{\delta r_i} &= 0_{i=1,2,\dots,Z}; & \frac{\delta Ep}{\delta r_i} &= 0_{i=1,2,\dots,Z}\end{aligned}\quad (3.62)$$

Anillo Externo

El anillo externo se encuentra estacionario por tanto su contribución a la energía cinética total y energía potencial total es nulo.

Bolas

El vector de posición del centro de masas de la bola i respecto al S.I. considerado es:

$$\vec{r}_i = r_i \cdot \cos(\alpha_i) \cdot \vec{i} + r_i \cdot \sin(\alpha_i) \cdot \vec{j} \quad (3.63)$$

El valor de la energía cinética viene dado por:

$$Ec_{bolai} = \frac{1}{2} \cdot m_{bo}(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) + \frac{1}{2} \cdot I_{bo} \cdot \theta_{bo}^2 \quad (3.64)$$

Derivando la velocidad a partir del vector de posición, se obtiene finalmente:

$$Ec_{bolai} = \frac{1}{2} \cdot m_{bo} (\vec{r}_i + \vec{r}_i \cdot \dot{\alpha}_i^2) + \frac{1}{2} \cdot I_{bo} \cdot \theta_{bo}^2 \quad (3.65)$$

Para el cálculo de la energía potencial de la bola i , tomando como referencia el centro del anillo externo, (origen de coordenadas), se tiene:

$$Ep_{bolai} = m_{bo} \cdot g \cdot h_{bo} = m_{bo} \cdot g \cdot r_i \cdot \text{sen}(\alpha_i) \quad (3.66)$$

Los términos de la ecuación de Lagrange para la bola 'i' se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta Ec}{\delta \dot{x}_{in}} \right) &= 0; & \frac{\delta Ec}{\delta x_{in}} &= 0; & \frac{\delta Ec}{\delta x_{in}} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta Ec}{\delta \dot{y}_{in}} \right) &= 0; & \frac{\delta Ec}{\delta y_{in}} &= 0; & \frac{\delta Ep}{\delta x_{in}} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta Ec}{\delta \dot{r}_i} \right) &= m_{bo} \cdot \dot{r}_i; & \frac{\delta Ec}{\delta r_i} &= m_{bo} \cdot r_i \cdot \dot{\alpha}_i^2; & \frac{\delta Ep}{\delta r_i} &= m_{bo} \cdot g \cdot r_i \cdot \text{sen}(\alpha_i) \end{aligned}$$

i=1,2,...,Z (3.67)

Contacto Bola-Anillo Interno

La fuerza de reacción, en Newton, debida a la deformación en el punto de contacto viene dada por:

$$F = C_{in} \cdot \delta_{in}^{3/2} \quad (3.68)$$

donde C es el coeficiente de rigidez, en $N/mm^{3/2}$ y δ es la deformación en mm :

El trabajo realizado durante una deformación infinitesimal vale:

$$dW = F \cdot d\delta$$

El trabajo desarrollado queda acumulado en forma de energía potencial elástica, y viene dado por:

$$\Delta W = \Delta Ep = \int F \cdot d\delta = \int C_{in} \cdot \delta_{in}^{3/2} \cdot d\delta = \frac{2}{5} \cdot C_{in} \cdot \delta_{in}^{5/2} \quad (3.69)$$

La energía potencial elástica total viene dada por:

$$Ep_{elastica} = \sum_{i=1}^{Z_{bolas}} \frac{2}{5} \cdot C_{in} \cdot \delta_{in_i}^{5/2} \quad (3.70)$$

Teniendo en cuenta las dimensiones de los elementos del rodamiento y el vector de posición del centro de masas de la bola respecto al centro de masas del anillo interno, ρ_i , el valor de la deformación δ_{in} en el contacto entre el anillo interno y la bola i , viene dado por:

$$\begin{aligned} \text{Si } \rho_i < r_{in} + r_{bo} &\rightarrow \delta_{in_i} = r_{in} + r_{bo} - \rho_i \\ \text{Si } \rho_i \geq r_{in} + r_{bo} &\rightarrow \delta_{in_i} = 0 \end{aligned} \quad (3.71)$$

CAPÍTULO 3: MODELO CINEMÁTICO-DINÁMICO DEL RODAMIENTO

El valor de ρ_i viene dado por la ecuación deducida anteriormente en la ecuación 3.40:

$$\rho_i = [r_i^2 + x_{in}^2 + y_{in}^2 - 2 \cdot r_i \cdot \cos(\alpha_i) \cdot x_{in} - 2 \cdot r_i \cdot \sin(\alpha_i) \cdot y_{in}]^{1/2} \quad (3.72)$$

Como solamente se tiene energía potencial elástica, se tiene que hallar la variación de esta energía respecto a las coordenadas generalizadas $(x_{in}, y_{in}, r_i, \dots, r_i, \dots, r_Z)$.

- Respecto a la coordenada generalizada, x_{in} :

$$\frac{\delta Ep}{\delta x_{in}} = \frac{2}{5} \cdot C_{in} \cdot \frac{\delta}{\delta x_{in}} (\delta_{in_i}^{5/2}) = C_{in} \cdot \delta_{in_i}^{3/2} \cdot \frac{\delta \delta_{in_i}}{\delta x_{in}} \quad (3.73)$$

Donde:

$$\frac{\delta \delta_{in_i}}{\delta x_{in}} = \frac{\delta \delta_{in_i}}{\delta \rho_i} \cdot \frac{\delta \rho_i}{\delta x_{in}} = - \frac{\delta \rho_i}{\delta x_{in}} \quad (3.74)$$

Teniendo finalmente:

$$\frac{\delta Ep}{\delta x_{in}} = -C_{in} \cdot \delta_{in_i}^{3/2} \cdot \frac{x_{in} - r_i \cdot \cos(\alpha_i)}{\rho_i} \quad (3.75)$$

- Respecto a la coordenada generalizada y_{in} :

$$\frac{\delta Ep}{\delta y_{in}} = \frac{2}{5} \cdot C_{in} \cdot \frac{\delta}{\delta y_{in}} (\delta_{in_i}^{5/2}) = C_{in} \cdot \delta_{in_i}^{3/2} \cdot \frac{\delta \delta_{in_i}}{\delta y_{in}} \quad (3.76)$$

Y de forma similar se obtiene:

$$\frac{\delta Ep}{\delta y_{in}} = -C_{in} \cdot \delta_{in_i}^{3/2} \cdot \frac{y_{in} - r_i \cdot \sin(\alpha_i)}{\rho_i} \quad (3.77)$$

- Respecto a las coordenadas generalizadas $r_i, \dots, r_i, \dots, r_Z$:

$$\frac{\delta Ep}{\delta r_i} = \frac{2}{5} \cdot C_{in} \cdot \frac{\delta}{\delta r_i} (\delta_{in_i}^{5/2}) = C_{in} \cdot \delta_{in_i}^{3/2} \cdot \frac{\delta \delta_{in_i}}{\delta r_i} \quad (3.78)$$

$i=1,2,\dots,Z$

Donde:

$$\frac{\delta \delta_{in_i}}{\delta r_i} = \frac{\delta \delta_{in_i}}{\delta \rho_i} \cdot \frac{\delta \rho_i}{\delta r_i} = - \frac{\delta \rho_i}{\delta r_i} \quad (3.79)$$

Teniendo finalmente:

$$\frac{\delta Ep}{\delta r_i} = -C_{in} \cdot \delta_{in_i}^{3/2} \cdot \frac{r_i - \cos(\alpha_i) \cdot x_{in} - \sin(\alpha_i) \cdot y_{in}}{\rho_i} \quad (3.80)$$

$i=1,2,\dots,Z$

La función de disipación de Rayleigh, D, considerando un amortiguamiento o una pérdida de energía cuando se produce el contacto de la bola con el anillo, viene dada por:

$$D_i = \sum_{i=1}^{Z_{bolas}} \frac{1}{2} \cdot D_{in} \cdot \dot{\rho}_i^2 \quad (3.81)$$

Contacto Bola-Anillo Externo

La energía potencial elástica del contacto bola-anillo externo, viene dada por:

$$Ep_{elastica} = \sum_{i=1}^{Z_{bolas}} \frac{5}{2} \cdot C_{in} \cdot \delta_{in_i}^{5/2} \quad (3.82)$$

Teniendo en cuenta las dimensiones de los elementos del rodamiento y el vector de posición del centro de masas de la bola respecto origen del S.R. global, r_i , el valor de la deformación δ_{out_i} en el contacto entre el anillo interno y la bola i , viene dado por:

$$\begin{aligned} \text{Si } r_i > R_{out} - r_{bo} &\rightarrow \delta_{out_i} = r_i + r_{bo} - R_{out} \\ \text{Si } r_i \leq R_{out} - r_{bo} &\rightarrow \delta_{out_i} = 0 \end{aligned} \quad (3.83)$$

Como solamente se tiene energía potencial elástica, se tiene que hallar la variación de esta energía respecto a las coordenadas generalizadas (x_{in} , y_{in} , $r_i, \dots, r_b, \dots, r_z$).

- Respecto a la coordenada generalizada, x_{in} :

$$\frac{\delta Ep}{\delta x_{in}} = \frac{2}{5} \cdot C_{out} \cdot \frac{\delta}{\delta x_{in}} (\delta_{out_i}^{5/2}) = C_{out} \cdot \delta_{out_i}^{3/2} \cdot \frac{\delta \delta_{out_i}}{\delta x_{in}} \quad (3.84)$$

Puesto que:

$$\frac{\delta \delta_{in_i}}{\delta x_{in}} = 0 \quad (3.85)$$

- Respecto a la coordenada generalizada y_{in} :

$$\frac{\delta Ep}{\delta y_{in}} = \frac{2}{5} \cdot C_{out} \cdot \frac{\delta}{\delta y_{in}} (\delta_{out_i}^{5/2}) = C_{out} \cdot \delta_{out_i}^{3/2} \cdot \frac{\delta \delta_{out_i}}{\delta y_{in}} \quad (3.86)$$

Ya que:

$$\frac{\delta \delta_{in_i}}{\delta y_{in}} = 0 \quad (3.87)$$

- Respecto a las coordenadas generalizadas $r_i, \dots, r_b, \dots, r_z$:

$$\frac{\delta Ep}{\delta r_i} = \frac{2}{5} \cdot C_{out} \cdot \frac{\delta}{\delta r_i} (\delta_{out_i}^{5/2}) = C_{out} \cdot \delta_{out_i}^{3/2} \cdot \frac{\delta \delta_{out_i}}{\delta r_i} \quad (3.88)$$

Quedando:

$$\frac{\delta Ep}{\delta r_i} = C_{out} \cdot \delta_{out_i}^{3/2} \quad i = 1, 2, \dots, Z \quad (3.89)$$

La función de disipación de Rayleigh, D, en el contacto de la bola-anillo externo, viene dada por:

$$D_o = \sum_{i=1}^{Z_{bolas}} \frac{1}{2} \cdot D_{out} \cdot \dot{r}_i^2 \quad (3.90)$$

Ecuaciones globales del movimiento

A partir de los apartados previos se llega a las siguientes ecuaciones globales del movimiento:

- Para la coordenada generalizada x_{in} se tiene:

$$\sum \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta Ec}{\delta \dot{x}_{in}} \right) - \sum \frac{\delta Ec}{\delta x_{in}} + \sum \frac{\delta Ep}{\delta x_{in}} + \sum \frac{\delta D}{\delta \dot{x}_{in}} = Q'_j$$

La ecuación diferencial del movimiento queda:

$$(m_{in} + m_{rotor}) \cdot \ddot{x}_{in} - \left[\sum_{i=1}^{Z_{bolas}} (C_{in} \cdot \delta_{in_i}^{\frac{3}{2}} + D_{in} \cdot \dot{r}_i \cdot \Gamma_{in}) \right] \cdot \frac{x_{in} - r_i \cdot \cos(\alpha_i)}{\rho_i} = F e_x + F u \cdot \cos(\alpha_{in}) \quad (3.91)$$

$$\Gamma_{in} = 0 \quad \text{si } \delta_{in} < 0; \quad \Gamma_{in} = 1 \quad \text{si } \delta_{in} \geq 0$$

- Para la coordenada generalizada y_{in} se tiene:

$$\sum \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta Ec}{\delta \dot{y}_{in}} \right) - \sum \frac{\delta Ec}{\delta y_{in}} + \sum \frac{\delta Ep}{\delta y_{in}} + \sum \frac{\delta D}{\delta \dot{y}_{in}} = Q'_j$$

La ecuación diferencial del movimiento queda:

$$(m_{in} + m_{rotor}) \cdot (\ddot{y}_{in} + g) - \left[\sum_{i=1}^{Z_{bolas}} (C_{in} \cdot \delta_{in_i}^{\frac{3}{2}} - D_{in} \cdot \dot{r}_i \cdot \Gamma_{in}) \right] \cdot \frac{y_{in} - r_i \cdot \sin(\alpha_i)}{\rho_i} = F e_x + F u \cdot \cos(\alpha_{in}) \quad (3.92)$$

$$\Gamma_{out} = 0 \quad \text{si } \delta_{out} < 0; \quad \Gamma_{out} = 1 \quad \text{si } \delta_{out} \geq 0$$

- Para las coordenadas generalizadas r_i desde $i=1, 2, \dots, Z$, se tiene:

$$\sum \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta Ec}{\delta \dot{r}_i} \right) - \sum \frac{\delta Ec}{\delta r_i} + \sum \frac{\delta Ep}{\delta r_i} + \sum \frac{\delta D}{\delta \dot{r}_i} = Q'_j$$

$$m_{bo} \cdot \ddot{r}_i - m_{bo} \cdot \dot{r}_i \cdot \dot{\alpha}_{in}^2 + m_{bo} \cdot g \cdot \sin(\alpha_i) - (C_{in} \cdot \delta_{in_i}^{\frac{3}{2}} - D_{in} \cdot \dot{r}_i \cdot \Gamma_{in}) \cdot \frac{\delta \rho_i}{\delta r_i} + C_{out} \cdot \delta_{out_i}^{\frac{3}{2}} + D_{out} \cdot \dot{r}_i \cdot \Gamma_{out} = 0 \quad (3.93)$$

$$\Gamma_{in} = 0 \quad \text{si } \delta_{in} < 0; \quad \Gamma_{in} = 1 \quad \text{si } \delta_{in} \geq 0$$

$$\Gamma_{out} = 0 \quad \text{si } \delta_{out} < 0; \quad \Gamma_{out} = 1 \quad \text{si } \delta_{out} \geq 0$$

3.4 Particularización de las ecuaciones a modelos de 5 y 11 G.D.L.

3.4.1 Modelo con ecuaciones de Newton

Obtenidas las ecuaciones diferenciales del movimiento para un sistema con 2+Z G.D.L., podemos plantear el sistema de ecuaciones diferenciales que describe el movimiento de un sistema particular, esto es, un rodamiento que posteriormente ensayaremos y nos permitirá validar el modelo.

Ecuaciones diferenciales del movimiento. Rodamiento con 3 elementos rodantes

El rodamiento más simple consta de un anillo interno, un anillo externo, y tres elementos rodantes interpuestos entre los anillos uniformemente espaciados, tal y como muestra la Figura 3.15. Tendremos un sistema de 5 ecuaciones diferenciales no lineales con 5 incógnitas, cuya solución nos permite determinar la posición del centro del anillo interno y la posición de cada elemento en cualquier instante (x_{in} , y_{in} , r_1 , r_2 , r_3). En la dirección x se tiene:

$$(m_{in} + m_{rotor}) \cdot \ddot{x} = Fe_x + Fu \cdot \cos(\alpha_{in}) - \sum_{i=1}^3 Fin_i \cdot \cos(\alpha_i) \quad (3.94)$$

En la dirección y se tiene:

$$(m_{in} + m_{rotor}) \cdot \ddot{y} = Fe_y + Fu \cdot \sin(\alpha_{in}) - \sum_{i=1}^3 Fin_i \cdot \sin(\alpha_i) - (m_{in} + m_{rotor}) \cdot g \quad (3.95)$$

En la dirección r_1 se tiene:

$$m_{bo} \cdot \ddot{r}_1 = C_{in} \cdot \delta_{in_1}^{\frac{3}{2}} - D_{in} \cdot \dot{r}_1 \cdot \Gamma_{in} - C_{out} \cdot \delta_{out_1}^{\frac{3}{2}} - D_{out} \cdot \dot{r}_1 \cdot \Gamma_{out} + m_{bo} \cdot r_1 \cdot \dot{\alpha}_1^2 - m_{bo} \cdot g \cdot \sin(\alpha_1) \quad (3.96)$$

En la dirección r_2 se tiene:

$$m_{bo} \cdot \ddot{r}_2 = C_{in} \cdot \delta in_2^{\frac{3}{2}} - D_{in} \cdot \dot{r}_2 \cdot \Gamma_{in} - C_{out} \cdot \delta out_2^{\frac{3}{2}} - D_{out} \cdot \dot{r}_2 \cdot \Gamma_{out} + m_{bo} \cdot r_2 \cdot \dot{\alpha}_t^2 - m_{bo} \cdot g \cdot \text{sen}(\alpha_2) \quad (3.97)$$

En la dirección r_3 se tiene:

$$m_{bo} \cdot \ddot{r}_3 = C_{in} \cdot \delta in_3^{\frac{3}{2}} - D_{in} \cdot \dot{r}_3 \cdot \Gamma_{in} - C_{out} \cdot \delta out_3^{\frac{3}{2}} - D_{out} \cdot \dot{r}_3 \cdot \Gamma_{out} + m_{bo} \cdot r_3 \cdot \dot{\alpha}_t^2 - m_{bo} \cdot g \cdot \text{sen}(\alpha_3) \quad (3.98)$$

Siendo:

$$\begin{aligned} \Gamma_{in} &= 0 & \text{si } \delta in < 0; & \quad \Gamma_{in} = 1 & \text{si } \delta in \geq 0 \\ \Gamma_{out} &= 0 & \text{si } \delta out < 0; & \quad \Gamma_{out} = 1 & \text{si } \delta out \geq 0 \end{aligned}$$

Ecuaciones diferenciales del movimiento. Rodamiento con 9 elementos rodantes

El rodamiento real consta de un anillo interno, un anillo externo, y nueve elementos rodantes interpuestos entre los anillos uniformemente espaciados. Para este modelo, tendremos un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales con 11 incógnitas, cuya solución nos permite determinar la posición del centro del anillo interno y la posición de cada elemento en cualquier instante (x_{in} , y_{in} , r_1 , r_2 , r_3 , r_4 , r_5 , r_6 , r_7 , r_8 , r_9). En la dirección x se tiene:

$$(m_{in} + m_{rotor}) \cdot \ddot{x} = Fe_x + Fu \cdot \cos(\alpha_{in}) - \sum_{i=1}^9 Fin_i \cdot \cos(\alpha_i) \quad (3.99)$$

En la dirección y se tiene:

$$(m_{in} + m_{rotor}) \cdot \ddot{y} = Fe_y + Fu \cdot \text{sen}(\alpha_{in}) - \sum_{i=1}^9 Fin_i \cdot \text{sen}(\alpha_i) - (m_{in} + m_{rotor}) \cdot g \quad (3.100)$$

En la dirección r_1 se tiene:

$$m_{bo} \cdot \ddot{r}_1 = C_{in} \cdot \delta in_1^{\frac{3}{2}} - D_{in} \cdot \dot{r}_1 \cdot \Gamma_{in} - C_{out} \cdot \delta out_1^{\frac{3}{2}} - D_{out} \cdot \dot{r}_1 \cdot \Gamma_{out} + m_{bo} \cdot r_1 \cdot \dot{\alpha}_t^2 - m_{bo} \cdot g \cdot \text{sen}(\alpha_1) \quad (3.101)$$

En la dirección r_2 se tiene:

$$m_{bo} \cdot \ddot{r}_2 = C_{in} \cdot \delta in_2^{\frac{3}{2}} - D_{in} \cdot \dot{r}_2 \cdot \Gamma_{in} - C_{out} \cdot \delta out_2^{\frac{3}{2}} - D_{out} \cdot \dot{r}_2 \cdot \Gamma_{out} + m_{bo} \cdot r_2 \cdot \dot{\alpha}_t^2 - m_{bo} \cdot g \cdot \text{sen}(\alpha_2) \quad (3.102)$$

En la dirección r_3 se tiene:

$$m_{bo} \cdot \ddot{r}_3 = C_{in} \cdot \delta in_3^{\frac{3}{2}} - D_{in} \cdot \dot{r}_3 \cdot \Gamma_{in} - C_{out} \cdot \delta out_3^{\frac{3}{2}} - D_{out} \cdot \dot{r}_3 \cdot \Gamma_{out} + m_{bo} \cdot r_3 \cdot \dot{\alpha}_t^2 - m_{bo} \cdot g \cdot \text{sen}(\alpha_3) \quad (3.103)$$

3.4 PARTICULARIZACIÓN DE LAS ECUACIONES A MODELOS DE 5 Y 11 G.D.L.

En la dirección r_4 se tiene:

$$m_{bo} \cdot \ddot{r}_4 = C_{in} \cdot \delta in_4^{3/2} - D_{in} \cdot \dot{r}_4 \cdot \Gamma_{in} - C_{out} \cdot \delta out_4^{3/2} - D_{out} \cdot \dot{r}_4 \cdot \Gamma_{out} + m_{bo} \cdot r_4 \cdot \dot{\alpha}_t^2 - m_{bo} \cdot g \cdot \text{sen}(\alpha_4) \quad (3.104)$$

En la dirección r_5 se tiene:

$$m_{bo} \cdot \ddot{r}_5 = C_{in} \cdot \delta in_5^{3/2} - D_{in} \cdot \dot{r}_5 \cdot \Gamma_{in} - C_{out} \cdot \delta out_5^{3/2} - D_{out} \cdot \dot{r}_5 \cdot \Gamma_{out} + m_{bo} \cdot r_5 \cdot \dot{\alpha}_t^2 - m_{bo} \cdot g \cdot \text{sen}(\alpha_5) \quad (3.105)$$

En la dirección r_6 se tiene:

$$m_{bo} \cdot \ddot{r}_6 = C_{in} \cdot \delta in_6^{3/2} - D_{in} \cdot \dot{r}_6 \cdot \Gamma_{in} - C_{out} \cdot \delta out_6^{3/2} - D_{out} \cdot \dot{r}_6 \cdot \Gamma_{out} + m_{bo} \cdot r_6 \cdot \dot{\alpha}_t^2 - m_{bo} \cdot g \cdot \text{sen}(\alpha_6) \quad (3.106)$$

En la dirección r_7 se tiene:

$$m_{bo} \cdot \ddot{r}_7 = C_{in} \cdot \delta in_7^{3/2} - D_{in} \cdot \dot{r}_7 \cdot \Gamma_{in} - C_{out} \cdot \delta out_7^{3/2} - D_{out} \cdot \dot{r}_7 \cdot \Gamma_{out} + m_{bo} \cdot r_7 \cdot \dot{\alpha}_t^2 - m_{bo} \cdot g \cdot \text{sen}(\alpha_7) \quad (3.107)$$

En la dirección r_8 se tiene:

$$m_{bo} \cdot \ddot{r}_8 = C_{in} \cdot \delta in_8^{3/2} - D_{in} \cdot \dot{r}_8 \cdot \Gamma_{in} - C_{out} \cdot \delta out_8^{3/2} - D_{out} \cdot \dot{r}_8 \cdot \Gamma_{out} + m_{bo} \cdot r_8 \cdot \dot{\alpha}_t^2 - m_{bo} \cdot g \cdot \text{sen}(\alpha_8) \quad (3.108)$$

En la dirección r_9 se tiene:

$$m_{bo} \cdot \ddot{r}_9 = C_{in} \cdot \delta in_9^{3/2} - D_{in} \cdot \dot{r}_9 \cdot \Gamma_{in} - C_{out} \cdot \delta out_9^{3/2} - D_{out} \cdot \dot{r}_9 \cdot \Gamma_{out} + m_{bo} \cdot r_9 \cdot \dot{\alpha}_t^2 - m_{bo} \cdot g \cdot \text{sen}(\alpha_9) \quad (3.109)$$

Siendo:

$$\begin{aligned} \Gamma_{in} &= 0 & \text{si } \delta_{in} < 0; & \quad \Gamma_{in} = 1 & \text{si } \delta_{in} \geq 0 \\ \Gamma_{out} &= 0 & \text{si } \delta_{out} < 0; & \quad \Gamma_{out} = 1 & \text{si } \delta_{out} \geq 0 \end{aligned}$$

3.4.2 Modelo con ecuaciones de Lagrange

De igual forma, utilizando las ecuaciones de Lagrange, hemos hallado las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de un rodamiento compuesto de anillo interno, anillo externo, y 'Z' elementos interpuestos entre los anillos uniformemente espaciados.

Ecuaciones diferenciales del movimiento. Rodamiento con 3 elementos rodantes

Particularizando estas ecuaciones a nuestro rodamiento con tres elementos solamente, el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales viene dado por:

En la dirección x se tiene:

$$(m_{in} + m_{rotor}) \cdot \ddot{x}_{in} - \left[\sum_{i=1}^3 (C_{in} \cdot \delta_{in_i}^{\frac{3}{2}} + D_{in} \cdot \dot{r}_i \cdot \Gamma_{in}) \right] \cdot \frac{x_{in} - r_i \cdot \cos(\alpha_i)}{\rho_i} = Fe_x + Fu \cdot \cos(\alpha_{in}) \quad (3.110)$$

$$\Gamma_{in} = 0 \quad \text{si } \delta_{in} < 0; \quad \Gamma_{in} = 1 \quad \text{si } \delta_{in} \geq 0$$

En la dirección y se tiene:

$$(m_{in} + m_{rotor}) \cdot (\ddot{y}_{in} + g) - \left[\sum_{i=1}^3 (C_{in} \cdot \delta_{in_i}^{\frac{3}{2}} - D_{in} \cdot \dot{r}_i \cdot \Gamma_{in}) \right] \cdot \frac{y_{in} - r_i \cdot \sen(\alpha_i)}{\rho_i} = Fe_y + Fu \cdot \cos(\alpha_{in}) \quad (3.111)$$

$$\Gamma_{out} = 0 \quad \text{si } \delta_{out} < 0; \quad \Gamma_{out} = 1 \quad \text{si } \delta_{out} \geq 0$$

En la dirección r_1 se tiene:

$$m_{bo} \cdot \ddot{r}_1 - m_{bo} \cdot \dot{r}_1 \cdot \dot{\alpha}_{in}^2 + m_{bo} \cdot g \cdot \sen(\alpha_1) - (C_{in} \cdot \delta_{in_1}^{\frac{3}{2}} - D_{in} \cdot \dot{r}_1 \cdot \Gamma_{in}) \cdot \frac{\delta \rho_1}{\delta r_1} + C_{out} \cdot \delta_{out_1}^{\frac{3}{2}} + D_{out} \cdot \dot{r}_1 \cdot \Gamma_{out} = 0 \quad (3.112)$$

En la dirección r_2 se tiene:

$$m_{bo} \cdot \ddot{r}_2 - m_{bo} \cdot \dot{r}_2 \cdot \dot{\alpha}_{in}^2 + m_{bo} \cdot g \cdot \sen(\alpha_2) - (C_{in} \cdot \delta_{in_2}^{\frac{3}{2}} - D_{in} \cdot \dot{r}_2 \cdot \Gamma_{in}) \cdot \frac{\delta \rho_2}{\delta r_2} + C_{out} \cdot \delta_{out_2}^{\frac{3}{2}} + D_{out} \cdot \dot{r}_2 \cdot \Gamma_{out} = 0 \quad (3.113)$$

En la dirección r_3 se tiene:

$$m_{bo} \cdot \ddot{r}_3 - m_{bo} \cdot \dot{r}_3 \cdot \dot{\alpha}_{in}^2 + m_{bo} \cdot g \cdot \sen(\alpha_3) - (C_{in} \cdot \delta_{in_3}^{\frac{3}{2}} - D_{in} \cdot \dot{r}_3 \cdot \Gamma_{in}) \cdot \frac{\delta \rho_3}{\delta r_3} + C_{out} \cdot \delta_{out_3}^{\frac{3}{2}} + D_{out} \cdot \dot{r}_3 \cdot \Gamma_{out} = 0 \quad (3.114)$$

Siendo:

$$\Gamma_{in} = 0 \quad \text{si } \delta_{in} < 0; \quad \Gamma_{in} = 1 \quad \text{si } \delta_{in} \geq 0$$

$$\Gamma_{out} = 0 \quad \text{si } \delta_{out} < 0; \quad \Gamma_{out} = 1 \quad \text{si } \delta_{out} \geq 0$$

Ecuaciones diferenciales del movimiento. Rodamiento con 9 bolas

Para un rodamiento real con nueve bolas, el sistema de ecuaciones diferenciales viene dado por:

En la dirección x se tiene:

$$(m_{in} + m_{rotor}) \cdot \ddot{x}_{in} - \left[\sum_{i=1}^9 (C_{in} \cdot \delta_{in_i}^{\frac{3}{2}} + D_{in} \cdot \dot{r}_i \cdot \Gamma_{in}) \right] \cdot \frac{x_{in} - r_i \cdot \cos(\alpha_i)}{\rho_i} = F e_x + F u \cdot \cos(\alpha_{in}) \quad (3.115)$$

$$\Gamma_{in} = 0 \quad \text{si } \delta_{in} < 0; \quad \Gamma_{in} = 1 \quad \text{si } \delta_{in} \geq 0$$

En la dirección y se tiene:

$$(m_{in} + m_{rotor}) \cdot (\ddot{y}_{in} + g) - \left[\sum_{i=1}^9 (C_{in} \cdot \delta_{in_i}^{\frac{3}{2}} - D_{in} \cdot \dot{r}_i \cdot \Gamma_{in}) \right] \cdot \frac{y_{in} - r_i \cdot \sin(\alpha_i)}{\rho_i} = F e_y + F u \cdot \sin(\alpha_{in}) \quad (3.116)$$

$$\Gamma_{out} = 0 \quad \text{si } \delta_{out} < 0; \quad \Gamma_{out} = 1 \quad \text{si } \delta_{out} \geq 0$$

En la dirección r_1 se tiene:

$$m_{bo} \cdot \ddot{r}_1 - m_{bo} \cdot \dot{r}_1 \cdot \alpha_{in}^2 + m_{bo} \cdot g \cdot \sin(\alpha_1) - (C_{in} \cdot \delta_{in_1}^{\frac{3}{2}} - D_{in} \cdot \dot{r}_1 \cdot \Gamma_{in}) \cdot \frac{\delta \rho_1}{\delta r_1} + C_{out} \cdot \delta_{out_1}^{\frac{3}{2}} + D_{out} \cdot \dot{r}_1 \cdot \Gamma_{out} = 0 \quad (3.117)$$

En la dirección r_2 se tiene:

$$m_{bo} \cdot \ddot{r}_2 - m_{bo} \cdot \dot{r}_2 \cdot \alpha_{in}^2 + m_{bo} \cdot g \cdot \sin(\alpha_2) - (C_{in} \cdot \delta_{in_2}^{\frac{3}{2}} - D_{in} \cdot \dot{r}_2 \cdot \Gamma_{in}) \cdot \frac{\delta \rho_2}{\delta r_2} + C_{out} \cdot \delta_{out_2}^{\frac{3}{2}} + D_{out} \cdot \dot{r}_2 \cdot \Gamma_{out} = 0 \quad (3.118)$$

En la dirección r_3 se tiene:

$$m_{bo} \cdot \ddot{r}_3 - m_{bo} \cdot \dot{r}_3 \cdot \alpha_{in}^2 + m_{bo} \cdot g \cdot \sin(\alpha_3) - (C_{in} \cdot \delta_{in_3}^{\frac{3}{2}} - D_{in} \cdot \dot{r}_3 \cdot \Gamma_{in}) \cdot \frac{\delta \rho_3}{\delta r_3} + C_{out} \cdot \delta_{out_3}^{\frac{3}{2}} + D_{out} \cdot \dot{r}_3 \cdot \Gamma_{out} = 0 \quad (3.119)$$

En la dirección r_4 se tiene:

$$m_{bo} \cdot \ddot{r}_4 - m_{bo} \cdot \dot{r}_4 \cdot \alpha_{in}^2 + m_{bo} \cdot g \cdot \sin(\alpha_4) - (C_{in} \cdot \delta_{in_4}^{\frac{3}{2}} - D_{in} \cdot \dot{r}_4 \cdot \Gamma_{in}) \cdot \frac{\delta \rho_4}{\delta r_4} + C_{out} \cdot \delta_{out_4}^{\frac{3}{2}} + D_{out} \cdot \dot{r}_4 \cdot \Gamma_{out} = 0 \quad (3.120)$$

En la dirección r_5 se tiene:

$$m_{bo} \cdot \ddot{r}_5 - m_{bo} \cdot \dot{r}_5 \cdot \dot{\alpha}_{in}^2 + m_{bo} \cdot g \cdot \sin(\alpha_5) - (C_{in} \cdot \delta_{in_5}^{\frac{3}{2}} - D_{in} \cdot \dot{r}_5 \cdot \Gamma_{in}) \cdot \frac{\delta \rho_5}{\delta r_5} + C_{out} \cdot \delta_{out_5}^{\frac{3}{2}} + D_{out} \cdot \dot{r}_5 \cdot \Gamma_{out} = 0 \quad (3.121)$$

En la dirección r_6 se tiene:

$$m_{bo} \cdot \ddot{r}_6 - m_{bo} \cdot \dot{r}_6 \cdot \dot{\alpha}_{in}^2 + m_{bo} \cdot g \cdot \sin(\alpha_6) - (C_{in} \cdot \delta_{in_6}^{\frac{3}{2}} - D_{in} \cdot \dot{r}_6 \cdot \Gamma_{in}) \cdot \frac{\delta \rho_6}{\delta r_6} + C_{out} \cdot \delta_{out_6}^{\frac{3}{2}} + D_{out} \cdot \dot{r}_6 \cdot \Gamma_{out} = 0 \quad (3.122)$$

En la dirección r_7 se tiene:

$$m_{bo} \cdot \ddot{r}_7 - m_{bo} \cdot \dot{r}_7 \cdot \dot{\alpha}_{in}^2 + m_{bo} \cdot g \cdot \sin(\alpha_7) - (C_{in} \cdot \delta_{in_7}^{\frac{3}{2}} - D_{in} \cdot \dot{r}_7 \cdot \Gamma_{in}) \cdot \frac{\delta \rho_7}{\delta r_7} + C_{out} \cdot \delta_{out_7}^{\frac{3}{2}} + D_{out} \cdot \dot{r}_7 \cdot \Gamma_{out} = 0 \quad (3.123)$$

En la dirección r_8 se tiene:

$$m_{bo} \cdot \ddot{r}_8 - m_{bo} \cdot \dot{r}_8 \cdot \dot{\alpha}_{in}^2 + m_{bo} \cdot g \cdot \sin(\alpha_8) - (C_{in} \cdot \delta_{in_8}^{\frac{3}{2}} - D_{in} \cdot \dot{r}_8 \cdot \Gamma_{in}) \cdot \frac{\delta \rho_8}{\delta r_8} + C_{out} \cdot \delta_{out_8}^{\frac{3}{2}} + D_{out} \cdot \dot{r}_8 \cdot \Gamma_{out} = 0 \quad (3.124)$$

En la dirección r_9 se tiene:

$$m_{bo} \cdot \ddot{r}_9 - m_{bo} \cdot \dot{r}_9 \cdot \dot{\alpha}_{in}^2 + m_{bo} \cdot g \cdot \sin(\alpha_9) - (C_{in} \cdot \delta_{in_9}^{\frac{3}{2}} - D_{in} \cdot \dot{r}_9 \cdot \Gamma_{in}) \cdot \frac{\delta \rho_9}{\delta r_9} + C_{out} \cdot \delta_{out_9}^{\frac{3}{2}} + D_{out} \cdot \dot{r}_9 \cdot \Gamma_{out} = 0 \quad (3.125)$$

Siendo:

$$\begin{aligned} \Gamma_{in} &= 0 & \text{si } \delta_{in} < 0; & \quad \Gamma_{in} = 1 & \text{si } \delta_{in} \geq 0 \\ \Gamma_{out} &= 0 & \text{si } \delta_{out} < 0; & \quad \Gamma_{out} = 1 & \text{si } \delta_{out} \geq 0 \end{aligned}$$

3.5 Incorporación de defectos localizados

Se entiende por defecto localizado aquella anomalía presente en alguno de los elementos del rodamiento tal como grietas, picaduras, hoyuelos, etc. A la hora de construir un modelo, el defecto será simplemente la variación, repentina o progresiva, del radio de curvatura de la superficie del anillo que ejerce de pista de rodadura del elemento rodante. Esta variación del radio de curvatura podrá ser positiva o negativa dependiendo

3.5 INCORPORACIÓN DE DEFECTOS LOCALIZADOS

de la causa del defecto, ya que este puede ser una erosión en la pista de rodadura o una impureza interpuesta entre el elemento rodante y la pista de rodadura.

Los defectos que se van a generar en el modelo de rodamiento son dos:

- Defecto en el anillo externo.
- Defecto en el anillo interno

El defecto en el elemento rodante se descarta dada su aleatoriedad y por tanto, la imposibilidad de establecerlo matemáticamente sin necesidad de recurrir a complejas técnicas estadísticas.

Pretendemos modelar en primer lugar, un defecto sobre la pista de rodadura del anillo externo. El radio de curvatura de esta superficie sobre el plano medio del rodamiento perpendicular al eje del mismo, viene dado por el valor R_{out} . Este valor en ausencia de defectos es un valor constante que, para el rodamiento 6206, tiene un valor de 27,75 mm. . El defecto más básico que se puede generar, es una variación repentina de este valor R_{out} a otro valor que denominaremos R_{out_d} , y que se mantendrá mientras el ángulo del elemento rodante coincida con el que abarque el defecto, para después volver a su valor inicial R_{out} , tal y como puede apreciarse en la Figura 3.19.

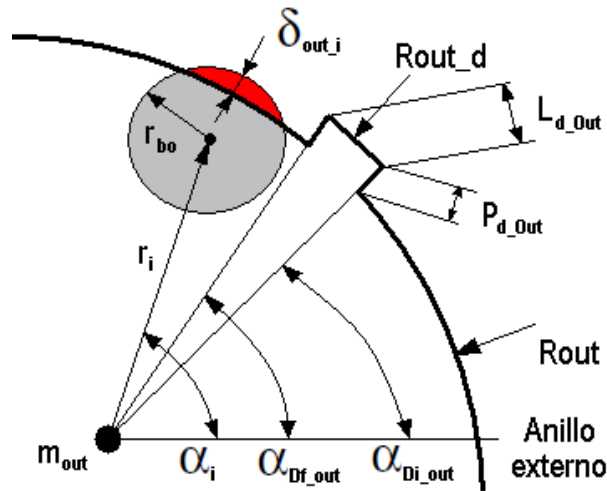


Figura 3.19. Esquema del defecto en anillo exterior.

Este defecto viene definido, según se aprecia en la Figura 3.19, por su posición angular α_{Di_out} , que se establecerá por defecto en 45° , la profundidad del defecto P_{Di_out} y la longitud del arco sobre R_{out} que abarca el defecto que designaremos con L_{d_out} .

Conocida la posición angular inicial α_{di_out} y la longitud del defecto L_{d_out} , podemos determinar la posición angular final del defecto α_{Df_out} , ecuación 3.150:

$$L_{d_out} = R_{out} \cdot (\alpha_{Df_out} - \alpha_{Di_out})$$

$$\alpha_{df_out} = \frac{L_{d_out}}{R_{out}} + \alpha_{Di_out} \quad (3.126)$$

CAPÍTULO 3: MODELO CINEMÁTICO-DINÁMICO DEL RODAMIENTO

Cuando la posición angular de un elemento α_i se encuentra dentro de la zona de defecto se cumple que:

$$\cos(\alpha_{Di_out}) < \cos(\alpha_i) < \cos(\alpha_{Df_out}) \quad (3.127)$$

además, si el defecto se encuentra situado sobre el primer o segundo cuadrante, se cumple que $\sin(\alpha_i) > 0$. Si el defecto se encuentra sobre el tercer o cuarto cuadrante, $\sin(\alpha_i) < 0$.

Esta variación del radio de curvatura, R_{out} , se traduce en una variación de la deformación en el punto de contacto del elemento rodante con el anillo, δ_{out} , que a su vez modifica la fuerza de reacción entre los dos elementos. La condición no lineal de la deformación en el punto de contacto elemento-anillo externo, viene dada ahora por la expresión:

- Elemento rodante sobre pista de rodadura del anillo externo:

$$\text{Si } r_i + r_{bo} > R_{out} \quad \text{entonces} \quad \delta_{out_i} = r_i + r_{bo} - R_{out}$$

$$\text{En otro caso,} \quad \delta_{out_i} = 0 \quad (3.128)$$

- Elemento rodante sobre defecto en pista rodadura:

$$\text{Si } r_i + r_{bo} > R_{out_d} \quad \text{entonces} \quad \delta_{out_i} = r_i + r_{bo} - R_{out_d}$$

$$\text{En otro caso,} \quad \delta_{out_i} = 0 \quad (3.129)$$

Hemos considerado en todo momento que el anillo externo es estacionario y que el anillo interno es el que gira a una velocidad angular ω_{in} . Para modelar un defecto en el anillo interno, no podemos definir un ángulo inicial como en el anillo externo, sino que tendremos que definir una posición angular inicial α_{di_in} .

Este ángulo irá variando con el tiempo según el incremento de la posición angular del anillo interno α_{in} , de modo que en todo instante, el valor de la posición inicial del defecto viene dada por $\alpha_{Di_int} = \alpha_{in} + \alpha_{di_in}$.

Además de la posición inicial, el defecto sobre el anillo interno viene definido, según se aprecia en la Figura 3.20, por la profundidad del defecto P_{d_in} y la longitud del arco sobre r_{in} que abarca el defecto que designaremos con L_{d_in} .

3.5 INCORPORACIÓN DE DEFECTOS LOCALIZADOS

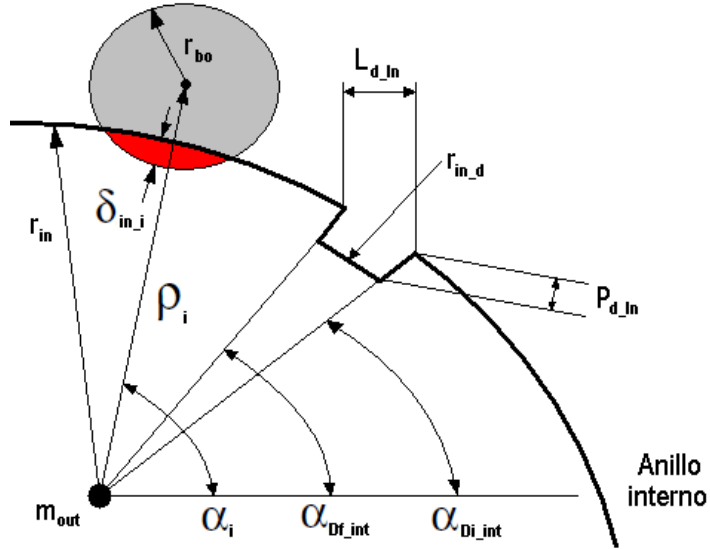


Figura 3.20. Esquema de defecto en anillo interior.

Conocida la posición angular inicial del defecto en el instante 't', α_{Di_int} y la longitud del defecto L_{d_in} , podemos determinar la posición angular final del defecto α_{Df_int} .

$$\alpha_{Df_int} = \frac{L_{d_in}}{r_{in}} + \alpha_{Di_int}$$

Cuando la posición angular un elemento rodante r_i se encuentra dentro de la zona de defecto se cumple que:

$$\alpha_{Di_int} < \alpha_i < \alpha_{Df_int}$$

Mientras dura la permanencia del elemento dentro de la zona de defecto, el radio de curvatura que inicialmente tenía un valor r_{in} experimenta una variación y pasa a valer r_{in_d} . Tal variación se traduce en una variación de la deformación en el punto de contacto del elemento rodante con el anillo, δ_{in} . La condición no lineal de la deformación en el punto de contacto elemento-anillo interno, viene dada ahora por la expresión:

- Elemento rodante sobre pista de rodadura del anillo interno:

$$\text{Si } r_i + r_{bo} > \rho_i \quad \text{entonces} \quad \delta_{in_i} = r_i + r_{bo} - \rho_i$$

$$\text{En otro caso,} \quad \delta_{in_i} = 0 \quad (3.130)$$

- Elemento rodante sobre defecto en pista rodadura:

$$\text{Si } r_{in_d} + r_{bo} > \rho_i \quad \text{entonces} \quad \delta_{in_i} = r_{in_d} + r_{bo} - \rho_i$$

$$\text{En otro caso,} \quad \delta_{in_i} = 0 \quad (3.131)$$

Capítulo 4

Implementación del modelo en Matlab-Simulink

4.1 Proceso de implementación

Después del planteamiento de las ecuaciones de movimiento de los modelos dinámicos de rodamiento, el siguiente paso es implementar dichos modelos para la resolver el sistema de ecuaciones no lineales, que llevan a los resultados buscados. Se ha elegido para ello el programa Matlab y su módulo Simulink, programas que presentan una elevada capacidad de simulación y modelado.

Una vez implementadas las ecuaciones, el proceso de simulación puede dividirse en 2 partes bien diferenciadas: la primera es el programa de carga de datos, en el que se introducen las características del rodamiento y el defecto (en caso de existir) y las condiciones de funcionamiento; la segunda es la simulación propiamente dicha, realizada en el entorno Simulink, tras cargar los parámetros introducidos en el paso anterior. Estrictamente, el programa de carga de datos es prescindible, ya que los valores que inicializa pueden ser directamente introducidos en el mismo Simulink, aunque debido al alto número de bloques que se implementan, la modificación de todos ellos conllevaría un gasto de tiempo mucho mayor, con una alta probabilidad de “olvidar” alguno de ellos. La inclusión de dicho programa facilita una carga rápida de todos los parámetros y una mayor sencillez de cambio de sus valores.

La simulación genera resultados que pueden ser utilizados por otros subprogramas para la obtención de resultados derivados (valores de pico, envolventes, obtención de frecuencias de vibración...), programas que se han creado también en Matlab.

Más tarde se integraron todos estos programas en un entorno visual, creado a partir del módulo GUI de Matlab, especializado en la creación de estos entornos, con objeto de facilitar aún más la introducción de datos y obtención de resultados, ya que todos los programas anteriores no se hallaban interconectados entre sí, pese a que utilicen datos provenientes unos de otros, y debían ejecutarse cada uno por separado, haciendo el manejo muy engorroso.

Como se indicó en el capítulo 1, este proyecto parte de una tesis original, que incluía tanto el modelo teórico como la implementación del mismo. Sin embargo, los resultados arrojados por el mismo, así como ciertos bloques que representan las ecuaciones no son correctos. En este apartado se efectuará un análisis de las soluciones adoptadas para subsanar los comportamientos “extraños” del sistema, así como una enumeración de las aportaciones que se realizaron al programa original.

4.1.1 Datos de entrada de los modelos

El componente de partida es el programa *datos.m*, que contiene todas las constantes que se le pasan al modelo en Simulink, relativas al rodamiento y a sus constantes de funcionamiento, así como algunos parámetros auxiliares. Este programa desaparece como tal en la implementación del entorno visual, pero los parámetros que éste introduce no varían.

El funcionamiento es sencillo: una vez abierto y ejecutado el programa *datos.m*, los parámetros que contiene quedan cargados en el Workspace de Matlab, desde donde son cargados por el modelo Simulink. Cada uno de los parámetros que aquí se enumera es completamente editable, aunque el programa está basado el rodamiento 6206 de la firma SKF, y los datos geométrico-másicos originales son los de este rodamiento. Entre paréntesis se indica su unidad de medida y en cursiva y negrita, su nomenclatura.

Características geométricas y másicas del rodamiento y rotor

- ***Rout*** (mm): Radio de la pista de rodadura exterior. Valor referencia: 55.5 mm.
- ***rin*** (mm): Radio de la pista de rodadura interior. Valor referencia: 36.5 mm.
- ***rm*** (mm): Radio medio del rodamiento. Valor referencia: 46 mm.
- ***rbo_*** (mm): Radio de los elementos rodantes. Valor referencia: 9.5 mm.
- ***Holgura*** (mm): Espacio existente entre el elemento rodante y la pista de rodadura, cuando el rodamiento se encuentra con la siguiente disposición. Valor referencia: 0.1 mm.

La holgura se utiliza como un parámetro auxiliar: Para que se produzca el correcto funcionamiento del modelo, es necesaria su inclusión, pero en el cómputo global, debe ser “eliminada”, mediante la resta de una fracción de su valor original. El resultado de esta operación es la deformación real que sufre el elemento.

- r_{elem} (mm): Radio de los elementos rodantes, con la adición de la mitad del valor de la holgura.
- M_{out} (kg): Masa del anillo exterior. Valor referencia: 0.075 kg.
- M_{in} (kg): Masa del anillo interior. Valor referencia: 0.065 kg.
- M_{bo} (kg): Masa de los elementos rodantes. Valor referencia: 0.0035 kg.
- M_{rotor} (kg): Masa del rotor. Valor referencia: 1 kg.

Condiciones de funcionamiento:

- rpm (rev. minuto): Velocidad angular del rotor. Posteriormente, se convierte a unidades de frecuencia, f_{in} (Hz) que corresponde a la del anillo interior, y por asociación, del rotor, f_{rotor} (Hz). Finalmente, la velocidad de giro del anillo interior se convierte a w_{in} (rad/s).
- f_{jaula} (Hz): Frecuencia de giro de jaula, la cual se convierte posteriormente a velocidad angular, w_{jaula} (rad/s).

Características dinámicas del rodamiento:

- C_{in} ($N/mm^{\frac{3}{2}}$): Constante de rigidez del contacto elemento rodante-anillo exterior.
- C_{out} ($N/mm^{\frac{3}{2}}$): Constante de rigidez del contacto elemento rodante-anillo interior.
- D (N·s/mm): Coeficiente amortiguamiento contacto elemento rodante-anillo interior.
- T (adimensional): Representa el coeficiente de la ecuación 3.7.

Condiciones iniciales

- X_{in_O} , Y_{in_O} (mm): Posición del centro del anillo interior (de ahora en adelante C.A.I.) con respecto al origen de coordenadas, situado en el centro del anillo exterior, siempre fijo. Son necesarios como condición inicial para la integración velocidad- posición en los bloques de Ecuación 1 y 2, y dependientes de las condiciones de carga, es decir, no pueden ser introducidos por el usuario directamente.
- rm (mm): Posición radial de las bolas o radio medio (modelo 5 GDL).

Condiciones de carga:

- F_{ex} (N): Fuerza radial según dirección x que actúa sobre el rotor.
- F_{ey} (N): Fuerza radial según dirección y que actúa sobre el rotor.
- F_u (N): Fuerza rotor desequilibrado.

Definición de defectos:

- Defecto en anillo exterior: posición inicial (A_{inicio} (°)), profundidad ($Pdefecto_out$ (mm)), longitud del defecto ($L_defecto$ (mm)).
- Defecto en anillo interior: profundidad ($Pdefecto_in$ (mm)), ángulo abarcado por el defecto ($Angulo_defecto$ (°)).

La definición de los defectos en el programa *datos.m* se realiza primero según sus parámetros geométricos. Sin embargo, para su uso en Simulink, es necesario modificarlos y obtener otros parámetros diferentes que permitan su evaluación e integración en el modelo.

- Para indicar la existencia del defecto, se utiliza un parámetro denominado ***Db*** en el caso de defecto en el anillo exterior, y ***Db_in*** en caso de defecto en el anillo interior. Más adelante, en la definición de los bloques, se verá cómo se utilizan estos parámetros. De momento, baste decir que puede tomar 2 valores: Si se considera que existe el defecto, toma valor 1. Si no existe, toma el valor 0. Los dos parámetros pueden activarse en el mismo experimento o activarse en simulaciones diferentes.
- El defecto se define como un escalón en la pista de rodadura. Esto provoca que exista el parámetro ***rin_defecto*** (mm) para el caso de defecto en anillo interior y ***Rout_defecto*** (mm) para el caso de defecto en anillo exterior. Las definiciones de ambos valores se encuentran en el programa, siendo el resultado de añadir la profundidad del defecto al radio interior o exterior de rodadura, respectivamente.
- Por último, se encuentran dos parámetros denominados ***CaI*** y ***CaF***, (adimensionales) utilizados sólo en el caso del defecto en anillo exterior. Para simplificar la programación, se considera que el defecto siempre se encuentra en el primer cuadrante, iniciándose en un ángulo de 45°, ángulo predeterminado por el parámetro A_{inicio} . Aunque es modificable, atendiendo a razones de programación, se aconseja que permanezca inalterable, pudiendo dar resultados erróneos. Difícilmente se encontraría un defecto tolerado en una aplicación real que comenzase en dicho ángulo y llegase hasta los otros cuadrantes, por lo que descomponiendo las coordenadas del defecto, obtendríamos que su coordenada seno siempre es positiva, mientras que la coordenada coseno son esos dos parámetros ***CaI*** (coseno del ángulo en el cual comienza el defecto) y ***CaF*** (coseno del ángulo donde termina el defecto). De manera análoga al parámetro ***Db/ Db_in*** se explicará su uso más adelante, en su correspondiente bloque de programa.

4.1.2 Modelos de 5 G.D.L: Diagramas de bloques en Newton y Lagrange

La implementación en Simulink sigue la misma pauta para los 4 modelos. Cada una de las ecuaciones definidas en el capítulo 2 para cada modelo se representa mediante un diagrama de bloques, los cuales se detallan a continuación en cada apartado. Sólo se realizará un estudio exhaustivo de la implementación de los modelos de 5 G.D.L. ya que los modelos de 11 G.D.L. cuentan con el mismo tipo de bloques, pero en mayor número.

A continuación se definen dos conceptos usados durante la descripción del modelo.

- Variable global: Puede ser utilizada por cualquier bloque de operaciones situado en cualquier módulo del programa. Desde ahora (V.G.)
- Variable local: Puede ser utilizada únicamente por los bloques situados en el módulo donde se cree o defina. Para ser utilizada por otro módulo, el módulo de origen debe emitirla como resultado. Desde ahora (V.L.)

Como se pudo observar en el capítulo 3, las ecuaciones que rigen los modelos de Newton y Lagrange son similares en lo que a ecuaciones de cálculo de fuerzas y deformaciones se refieren, difiriendo únicamente en las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de los elementos rodantes. Por tanto, este apartado contendrá los bloques comunes a los dos modelos, y después se detallarán, para cada uno de los sistemas de ecuaciones, los bloques correspondientes.

4.1.2.1 Bloques generales

Cada uno de los modelos cuenta con 6 bloques principales y los bloques de muestra de resultados, cuyo esquema general se muestra en la Figura 4.1. En estos bloques generales se observan bloques con extensión *.mat*, que generan archivos de la misma extensión (formato Matlab) y que recogen los datos de los parámetros calculados.

- Bloque Movimiento.
- Bloque Ecuación X.
- Bloque Ecuación Y.
- Bloque Elemento 1, Elemento 2 y Elemento 3.
- Bloques de muestra de resultados (fuerzas, desplazamientos, deformaciones...).

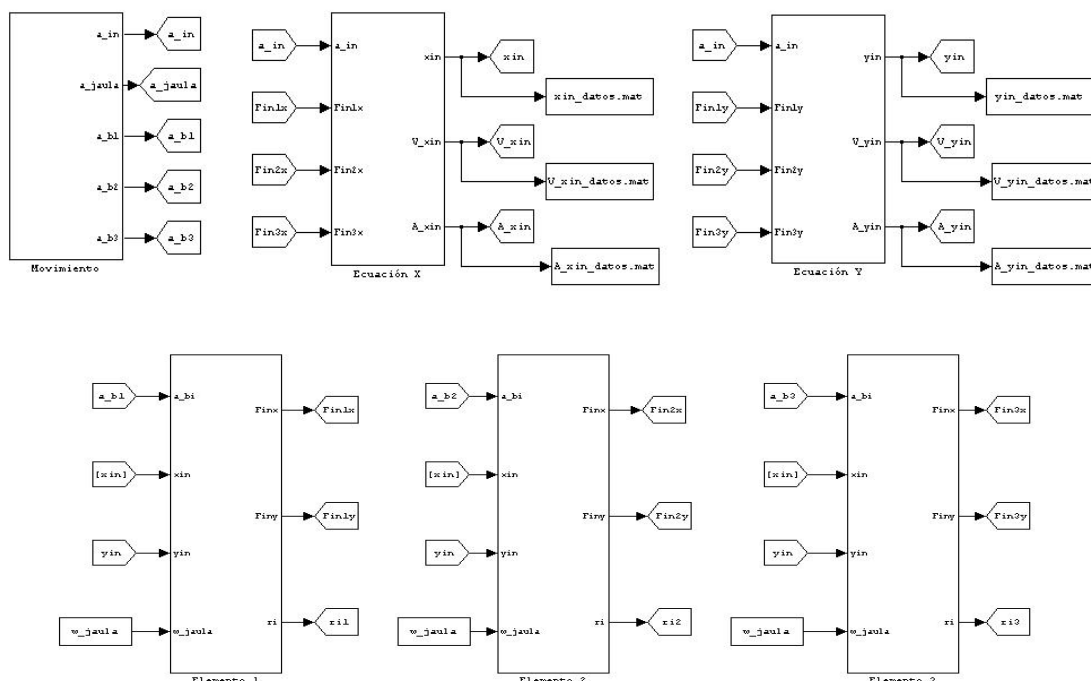


Figura 4.1. Bloques Movimiento, Ecuaciones X e Y y Elementos 1, 2 y 3.

Los bloques Scope (Figura 4.2) son los visualizadores inmediatos de ondas, en los que se muestran las evoluciones de los parámetros calculados en Simulink, permitiendo una comprobación rápida de la simulación.

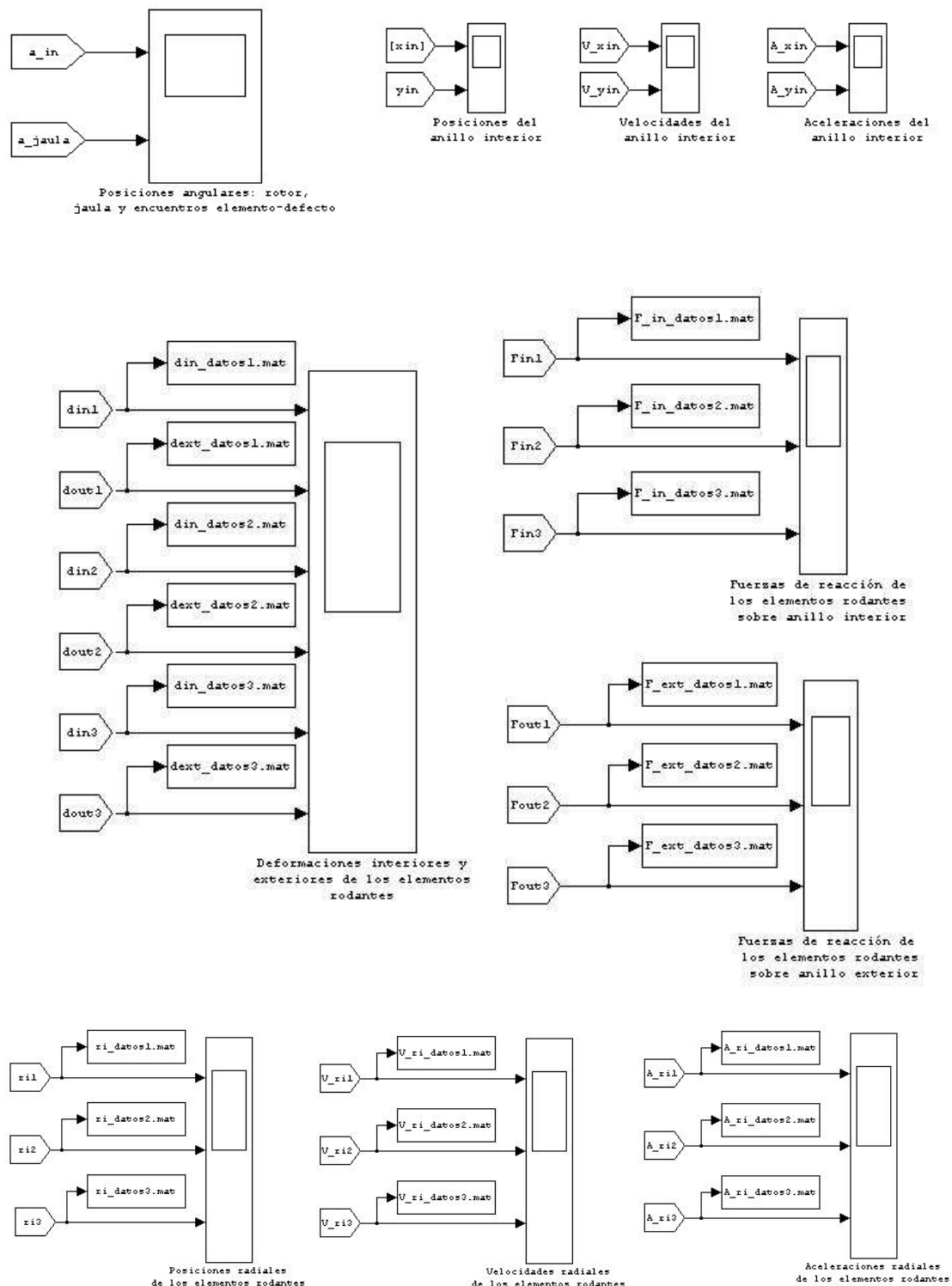


Figura 4.2. Bloques visualizadores de los parámetros calculados por el sistema.

- Posición angular del rotor y de la jaula.
- Posición del C.A.I.
- Velocidad del C.A.I.
- Aceleración C.A.I.
- Deformaciones interiores y exteriores de los elementos rodantes.
- Fuerzas sobre el anillo interior, ejercidas por los elementos rodantes.
- Fuerzas sobre el anillo exterior, ejercidas por los elementos rodantes.
- Distancia centro de anillo exterior- centro de los elementos rodantes.
- Velocidad radial de los elementos rodantes.
- Aceleración radial de los elementos rodantes.

4.1.2.2 Bloque Movimiento

En éste bloque se definen todos los parámetros correspondientes al movimiento del sistema, tanto de los elementos rodantes como de los defectos. Las entradas del bloque son las frecuencias del rotor y de la jaula (f_{in} y f_{jaula}), pasados como parámetro a un generador de formas de onda. El bloque que genera el movimiento angular del sistema se representa en la Figura 4.3:

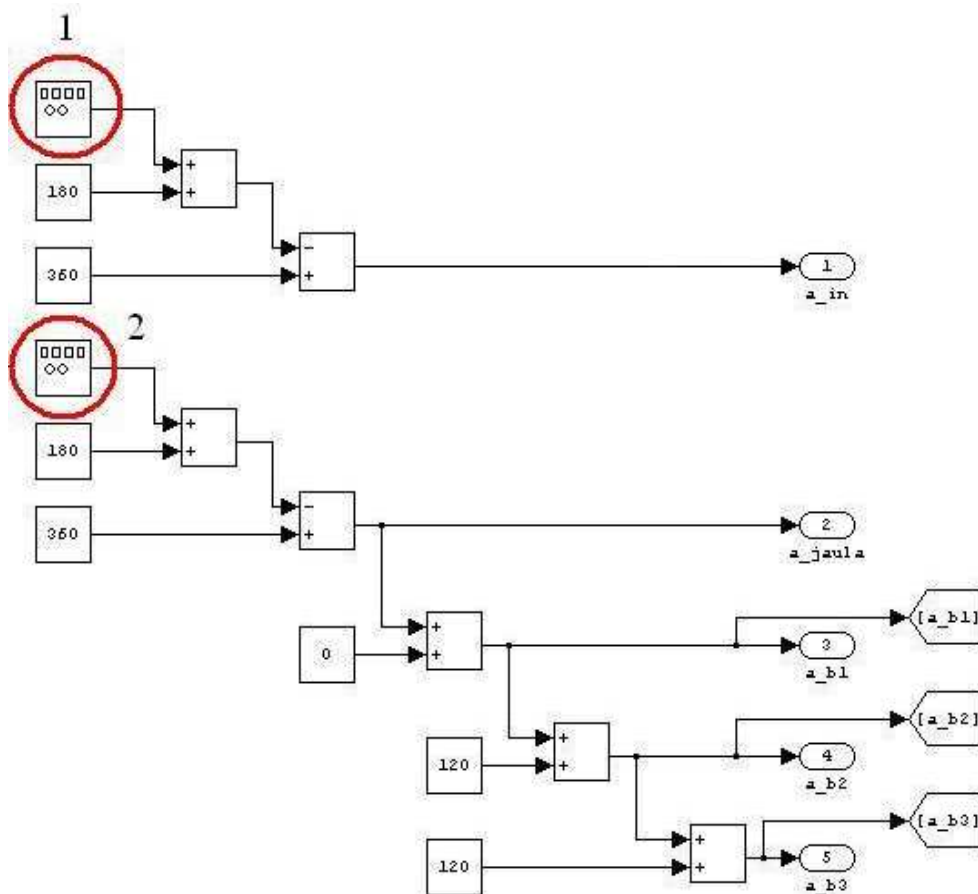


Figura 4.3. Bloques generadores del movimiento del rotor y los elementos rodantes.

CAPÍTULO 4: IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO EN MATLAB-SIMULINK

De arriba abajo, los bloques englobados en los círculos rojos son los generadores de las formas de onda que representan la posición angular del rotor (1) y la jaula (2), respectivamente, y a las que se les pasan las frecuencias f_{in} y f_{jaula} como parámetro para generar la onda.

Del parámetro que representa la velocidad de giro de la jaula (2), se derivan 3 desfases, correspondientes a las formas de onda que representan a los elementos rodantes del rodamiento: La primera en consonancia con la posición angular de la jaula, la segunda desfasada 120° y la tercera desfasada 240° . Las salidas del bloque son las siguientes:

- a_{in} , que corresponde al ángulo girado por el rotor α_{in} (1).
- a_{jaula} , que es el ángulo girado por la jaula del rodamiento α_{jaula} (2).
- a_{b1} , posición angular del elemento rodante 1, que corresponde a α_1 (3).
- a_{b2} , posición angular del elemento rodante 2, que corresponde a α_2 (4).
- a_{b3} , posición angular del elemento rodante 3, que corresponde a α_3 (5).

Este bloque sería suficiente para representar el movimiento de rotación de un sistema sin defecto: rotor, jaula y elementos rodantes. Para simular la presencia, posición y movimiento de éste, se implantan 2 diagramas de bloques más: uno para defecto interior y otro para defecto exterior.

Defecto en pista interior

Para simular el defecto, se le añade al movimiento del rotor un desfase correspondiente al ángulo del defecto. Así, el ángulo abarcado por el defecto comenzará en la posición en la que se encuentre el rotor y terminará en un ángulo similar a $Angulo_rotor (a_{in}) + Angulo_defecto = a_{in}B$. El hacer coincidir el ángulo del rotor con el inicial del defecto ahorra la utilización de un parámetro adicional que debería introducirse para controlar el comienzo del defecto. La representación en Simulink es la siguiente. El recuadro azul que se aprecia en la figura 4.4 engloba los bloques añadidos que realizan el desfase.

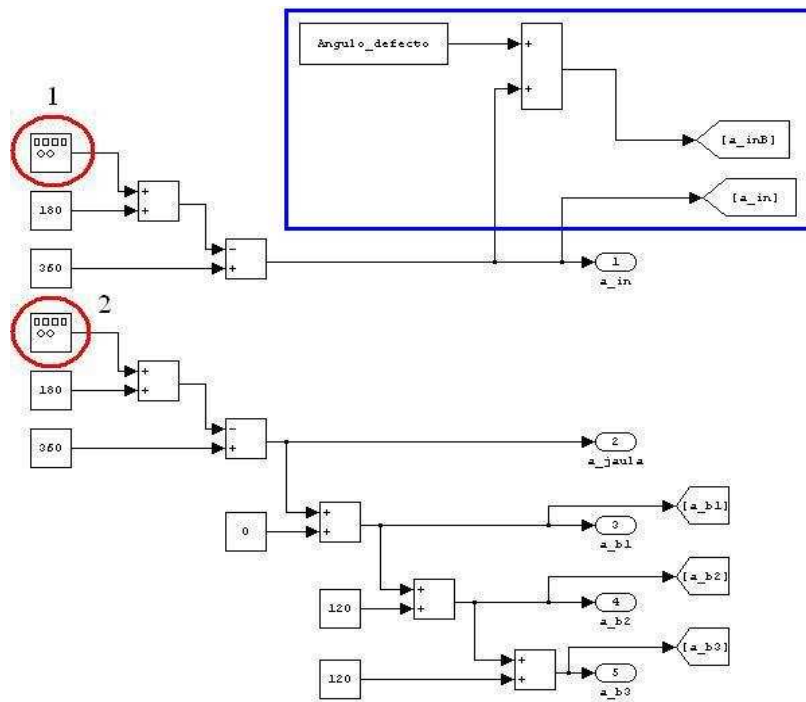


Figura 4.4. Adición de los bloques para el cálculo de la posición del defecto en pista interior.

El subbloque de la figura 4.5 define los encuentros entre los elementos rodantes y el defecto. El esquema es el que sigue:

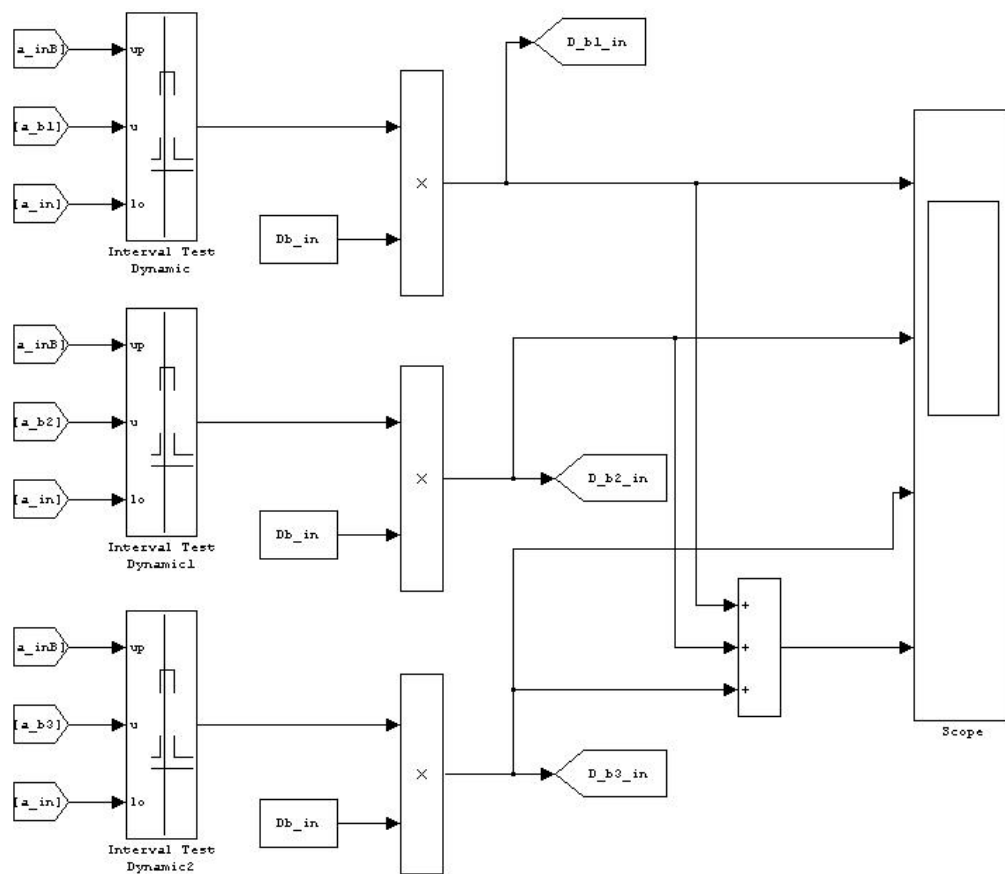


Figura 4.5. Diagrama de bloques para el cálculo de los encuentros elemento rodante- defecto en pista interior.

El funcionamiento del subbloque es el siguiente:

- Existen 3 bloques *Interval Test Dynamic*, cada uno correspondiente a un elemento rodante. El bloque *Interval Test Dynamic* tiene 3 entradas. La primera (*up*), es el ángulo final del defecto a_{inB} ; la segunda (*u*), es el ángulo en el que se encuentra el elemento rodante, a_{b1} , a_{b2} , a_{b3} ; la tercera (*lo*), es el ángulo inicial del defecto, coincidente con la posición del rotor, a_{in} . Si el ángulo de la bola está entre el intervalo entre a_{in} y a_{inB} , se emite un impulso de valor 1.
- El segundo elemento es el multiplicador. El primer valor es el impulso emitido por el bloque anterior. El segundo es el parámetro que se comentó anteriormente en la definición de parámetros del programa, Db_{in} . Como estamos en el caso de existencia de defecto en pista interior, su valor en el fichero datos.m es igual a 1. Esto significa que siempre está multiplicando por 1 al multiplicador. Cuando a éste le llega el impulso del *Interval Test Dynamic*, la señal obtenida, $D_{b1_{in}}$, $D_{b2_{in}}$, $D_{b3_{in}}$ emitirá un impulso de valor 1, y de duración similar al tiempo en el que el ángulo de la bola se encuentre dentro del defecto (entre los valores a_{in} y a_{inB}).
- El bloque Scope mostrará la serie de impulsos de cada elemento, junto con un sumatorio de todos los impulsos.

Defecto en pista exterior

En este caso, el defecto no se halla en movimiento, como en el caso de defecto en el anillo interior, sino que permanece fijo en el primer cuadrante de la pista externa del rodamiento. Aquí entran en juego tres de los parámetros antes enumerados en el archivo datos.m: Db , CaI y CaF .

Para calcular los encuentros elemento rodante-defecto, se implementan los siguientes bloques.

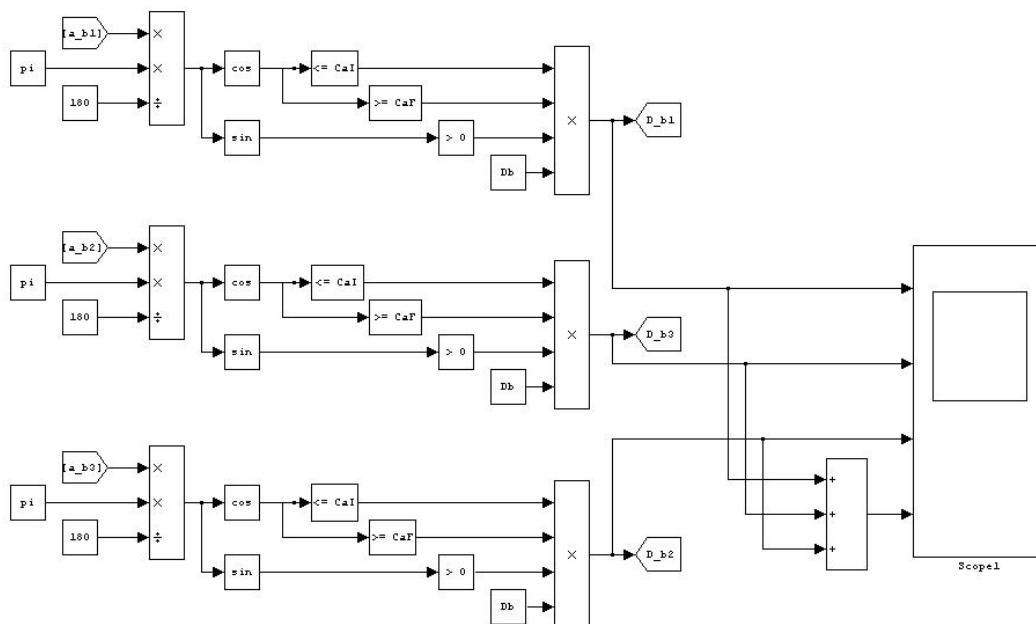


Figura 4.6. Diagrama de bloques para el cálculo de los encuentros elemento rodante- defecto en pista exterior.

Para calcular los encuentros elemento- defecto, se parte de la situación del elemento rodante (a_{b1} , a_{b2} , a_{b3}). Su ángulo de situación se descompone en coordenadas seno y coseno y se compara con las coordenadas del defecto, cuya situación se definió en el archivo *datos.m*.

- Si la coordenada seno del elemento es mayor que 0, su entrada correspondiente al bloque multiplicador emitirá un 1.
- Si la coordenada coseno de la bola está entre los valores **CaI** y **CaF**, definidos en el archivo *datos.m*, las dos entradas emiten un 1.
- Al estar en caso de defecto externo, **Db** siempre vale 1.
- Cumplidas todas esas condiciones, el bloque multiplicador emitirá un impulso de valor 1 y duración similar al tiempo en el que se cumplan las condiciones (tiempo de coincidencia elemento- defecto), cuantificado en los parámetros D_{b1} , D_{b2} y D_{b3} .
- En el caso de que alguna condición no se cumpla, el elemento y el defecto no estarán en contacto.
- El bloque Scope mostrará la serie de impulsos de cada elemento, junto con un sumatorio de todos los impulsos.

4.1.2.3 Bloque Ecuación X

En la Figura 4.7 se representa el diagrama de bloques en el que se realiza la integración de las ecuaciones 3.94 (Newton) y 3.110 (Lagrange), correspondientes al movimiento del C.A.I. en la dirección x .

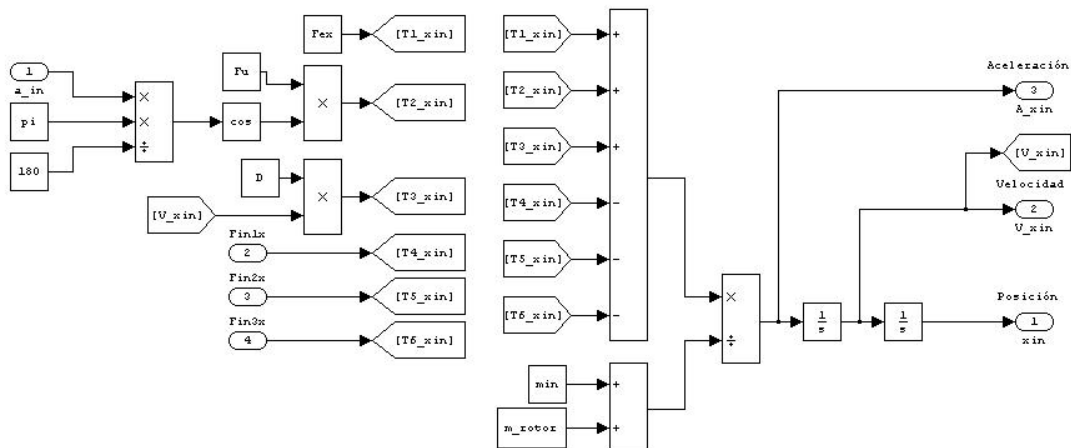


Figura 4.7. Diagrama de bloques para la implementación de la ecuación X.

Las entradas para el bloque son.

- La posición angular del rotor, a_{in} , que se corresponde con el ángulo α_{in} .
- Las componentes según la dirección x de las fuerzas de reacción de los elementos rodantes sobre el anillo interior $Fin1x$, $Fin2x$ y $Fin3x$.

El subbloque derecho representa la ecuación diferencial y su integración. Sus entradas son los resultados de los demás subbloques, que se guardan como parámetros con los siguientes nombres.

- Fuerzas exteriores sobre el rodamiento en la dirección x (T1_xin).
- Fuerzas de desequilibrio del rotor en dirección x (T2_xin).
- Amortiguamiento (T3_xin).
- Fuerzas interiores ejercidas por el elemento rodante sobre la pista interior (T4_xin, T5_xin, T6_xin).

Sus salidas son:

- La posición (V.L.), según la dirección x , del C.A.I, x_{in} (1).
- La velocidad (V.L.), según la dirección x , del C.A.I, V_{xin} (2).
- La aceleración (V.L.), según la dirección x , del C.A.I, A_{xin} (3).

4.1.2.4 Bloque Ecuación Y

En la Figura 4.8 se representa el diagrama de bloques en el que se realiza la integración de las ecuaciones 3.95 (Newton) y 3.111 (Lagrange), correspondiente al movimiento del C.A.I. en la dirección y .

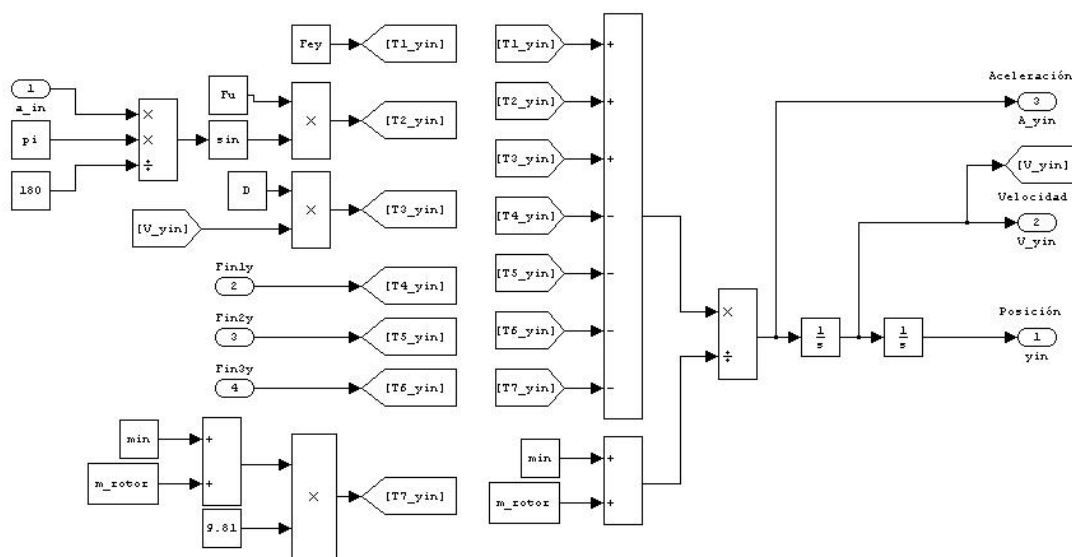


Figura 4.8. Diagrama de bloques para la implementación de la ecuación Y.

Las entradas al bloque son las siguientes.

- La posición angular del rotor, a_{in} , que se corresponde con el ángulo α_{in} .
- Las componentes según la dirección y de las fuerzas de reacción de los elementos rodantes sobre el anillo interior $Fin1y$, $Fin2y$ y $Fin3y$.

El subbloque superior representa la ecuación general y su integración. Sus entradas son las siguientes.

- Fuerzas exteriores sobre el rodamiento en la dirección y ($T1_yin$).
- Fuerzas de desequilibrio del rotor en dirección y ($T2_yin$).
- Amortiguamiento ($T3_yin$).
- Fuerzas interiores ejercidas por el elemento rodante sobre la pista interna ($T4_yin$, $T5_yin$, $T6_yin$).
- Peso del anillo interior y del rotor ($T7_yin$).

Sus salidas son:

- La posición (V.L.), según la dirección y , del C.A.I, y_{in} (1).
- La velocidad (V.L.), según la dirección y , del C.A.I, V_{yin} (2).
- La aceleración (V.L.), según la dirección y , del C.A.I, A_{yin} (3).

4.1.2.5 Modelos de 5 G.D.L: Bloques Elemento para el modelo de Newton

En el bloque Elemento se calculan las ecuaciones 3.96, 3.97 y 3.98, que gobierna el comportamiento de las fuerzas que actúan sobre los elementos rodantes. Los bloques son exactamente iguales entre sí, con la salvedad de que toman las posiciones angulares de elementos diferentes.

Cada uno de los términos de dichas ecuaciones puede descomponerse en los subbloques mostrados en la Figura 4.9 del diagrama. Debido al gran tamaño del diagrama, se han identificado los subbloques mediante números. Los subbloques son los siguientes.

- Bloque 1: Realiza la integración y resolución de la ecuación diferencial.
- Bloque 2: Cálculo de las fuerzas centrífugas de los elementos rodantes.
- Bloque 3: Cálculo del término referente a los pesos de los elementos rodantes.
- Bloque 4: Cálculo de las fuerzas exteriores F_{out_i} (mediante coeficientes de rigidez y deformaciones del elemento).
- Bloque 5: Posición del C.A.I. a lo largo del tiempo.
- Bloque 6: Cálculo de las fuerzas interiores F_{in_i} (mediante coeficientes de rigidez y deformaciones del elemento).

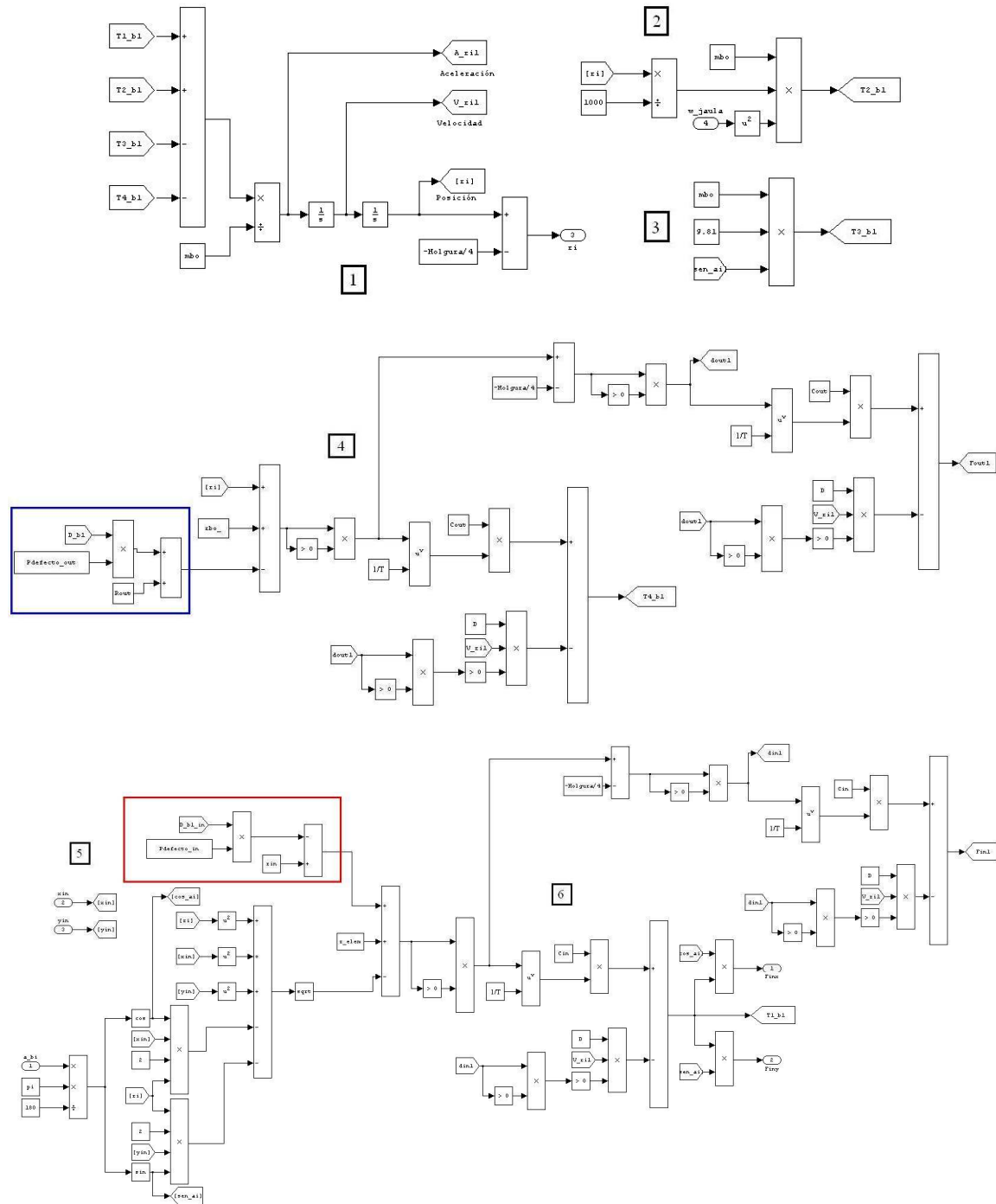


Figura 4.9. Diagramas de bloques para la implementación de las ecuaciones 3.96, 3.97 y 3.98.

Las entradas del bloque son:

- La posición angular del elemento rodante, a_{bi} , que se corresponden con los ángulos de posiciones del elemento rodante α_i .
- La coordenada del C.A.I, según el eje x , xin .
- La coordenada del C.A.I, según el eje y , yin .
- La velocidad angular de la jaula, w_{jaula} que se corresponde con ω_{jaula} .

Las salidas del bloque son:

- Las componentes de la fuerza radial según el eje x , Fin_i . (V.L.).
- Las componentes de la fuerza radial según el eje y , Fin_i . (V.L.).
- La posición radial de las bolas con respecto al C.A.I, ri_i . (V.L.).
- También se obtienen los parámetros Fin_i , $Fout_i$, din y $dout$, que representan las fuerzas radiales sobre el anillo interior y exterior y las deformaciones interior y exterior, respectivamente, de los elementos rodantes durante su movimiento (V.G.)

Bloques de simulación del defecto en pista interior

Para simular el efecto del defecto en pista interior, se añade un pequeño módulo, señalado en el esquema de la Figura 4.9 en rojo, que representa las influencias del defecto, como se indica en las ecuaciones 3.130 y 3.131. La modificación actúa como sigue.

- En el caso de no existencia de defecto, la entrada superior del sumatorio es el radio interior de la pista de rodadura **rin**. Sin embargo, si el elemento rodante encontrase el defecto, dicho radio sería diferente, ya que la distancia del centro del elemento rodante al origen de coordenadas sería distinto, debido al descenso del mismo.
- Se vio que el parámetro D_bl_in emitía impulsos de valor 1 cada vez que se encontraban elemento y defecto. Éste parámetro es multiplicado por la profundidad del defecto **Pdefecto_in**, obteniéndose así impulsos del valor de la profundidad del defecto.
- Éste valor resultante siempre resta (al ser negativo) su profundidad al radio interior de la pista de rodadura.

Bloques de simulación del defecto en pista exterior

Para simular el efecto del defecto en pista exterior, se añade un pequeño módulo, señalado en el esquema de la Figura 4.9 en azul, que representa las influencias del defecto, como se indica en las ecuaciones 3.128 y 3.129. La modificación actúa como sigue.

- En el caso de no existencia de defecto, la entrada inferior del sumatorio es el radio exterior de la pista de rodadura **Rout**. Sin embargo, si la bola encontrase el defecto, dicho radio sería diferente, ya que la distancia del centro del elemento rodante al origen de coordenadas sería distinto, debido al ascenso del mismo.
- Se vio que el parámetro D_bl emitía impulsos de valor 1 cada vez que se encontraban bola y defecto. Éste parámetro es multiplicado por la profundidad del defecto **Pdefecto_out**, obteniéndose así impulsos del valor de la profundidad del defecto.
- Éste valor resultante siempre suma (al ser negativo) su profundidad al radio exterior de la pista de rodadura.

4.1.2.6 Modelos de 5 G.D.L: Bloques Elemento para el modelo de Lagrange

En el bloque Elemento se calculan las ecuaciones 3.112, 3.113 y 3.114, que gobiernan el comportamiento de las fuerzas que actúan sobre los elementos rodantes. Los bloques son exactamente iguales entre sí, con la salvedad de que toman las posiciones angulares de elementos diferentes.

Cada uno de los términos de dichas ecuaciones puede descomponerse en los subbloques mostrados en las figuras 4.10, 4.10(bis 1) y 4.10(bis 2) del diagrama. Debido al gran tamaño del diagrama, se ha dividido éste en varias páginas y se han identificado los subbloques mediante números. Los subbloques son los siguientes.

- Bloque 1: Realiza la integración y resolución de la ecuación diferencial.
- Bloque 2: Cálculo del término referente a las fuerzas centrífugas de los elementos rodantes.
- Bloque 3: Cálculo del término referente a los pesos de los elementos rodantes.
- Bloque 4: Introducción de parámetros de posición del C.A.I. a lo largo del tiempo.
- Bloque 5: Cálculo del parámetro p_i .
- Bloque 6: Cálculo del término $x_{in}-r_{in}$ de la ecuación 3.75.
- Bloque 7: Cálculo del término $y_{in}-r_{in}$ de la ecuación 3.77.
- Bloque 8: Cálculo del término $r_i-\cos-\sin$ de la ecuación 3.80.
- Bloque 9: Cálculo de las fuerzas interiores F_{in_i} (mediante coeficientes de rigidez y deformaciones del elemento).
- Bloque 10: Cálculo de las fuerzas exteriores F_{out_i} (mediante coeficientes de rigidez y deformaciones del elemento).
- Bloque 11: Cálculo de las ecuaciones conjuntas 3.75, 3.77, 3.80.

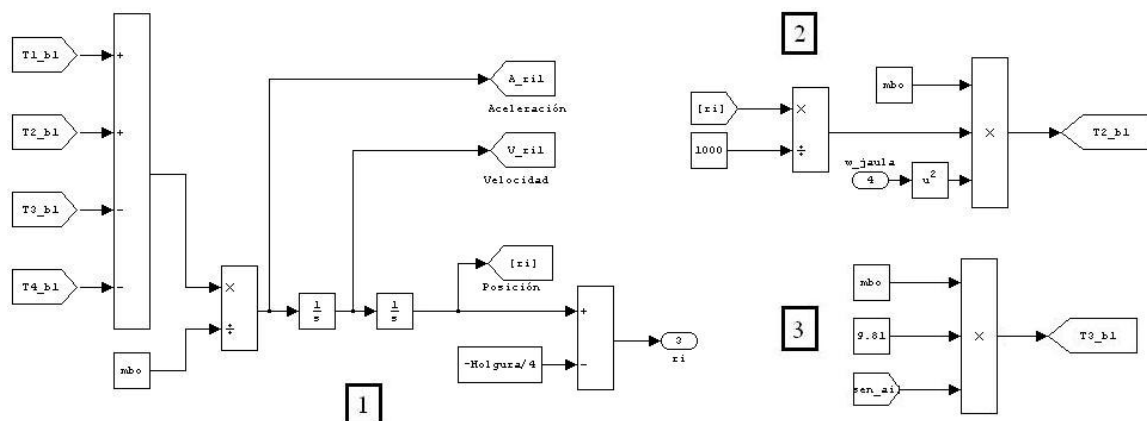


Figura 4.10. Diagrama de bloques que implementa las ecuaciones 3.112, 3.113, 3.114 (1 de 3).

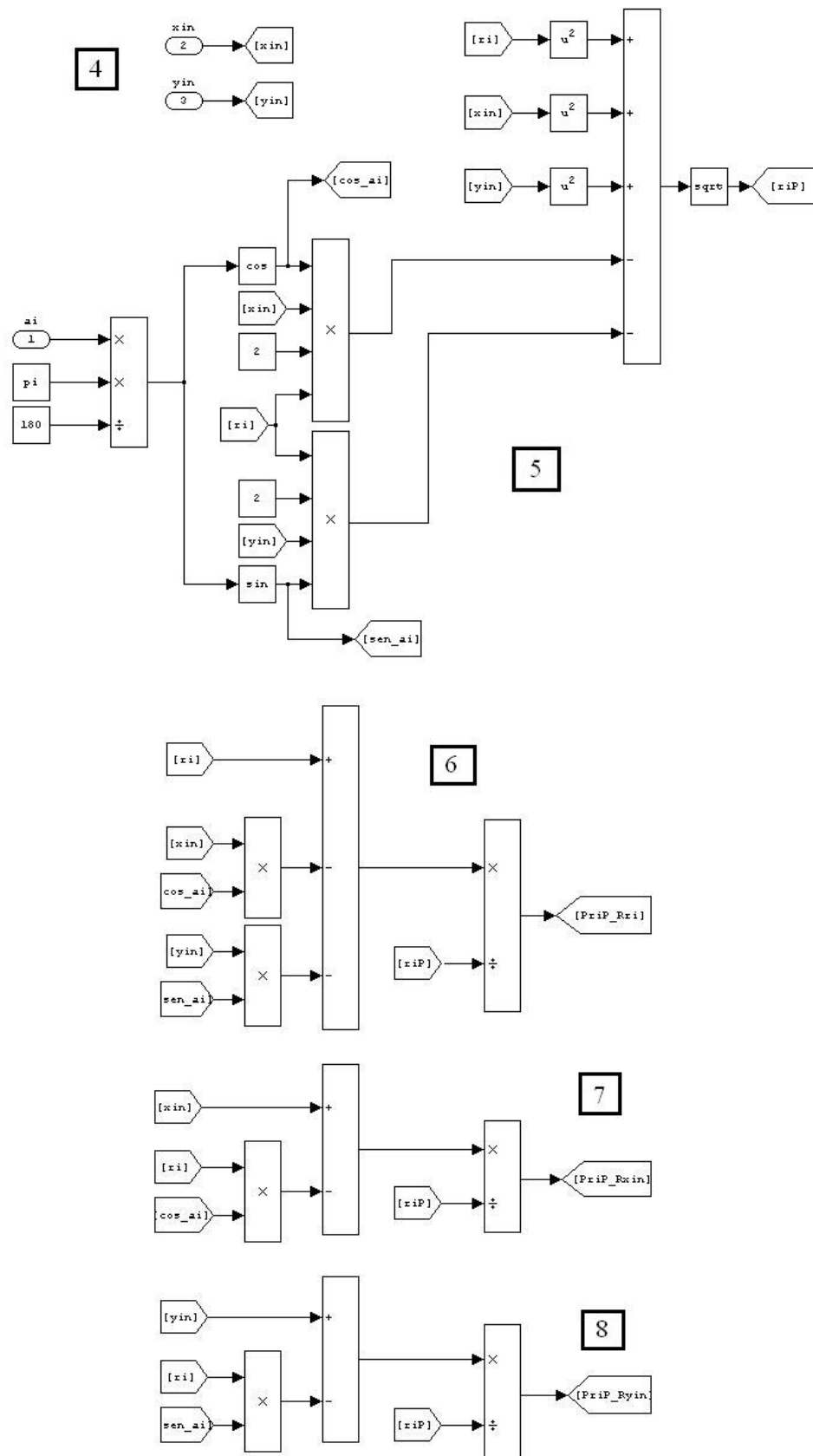
**Figura 4.10 (bis 1).**

Diagrama de bloques que implementa las ecuaciones 3.112, 3.113, 3.114 (2 de 3).

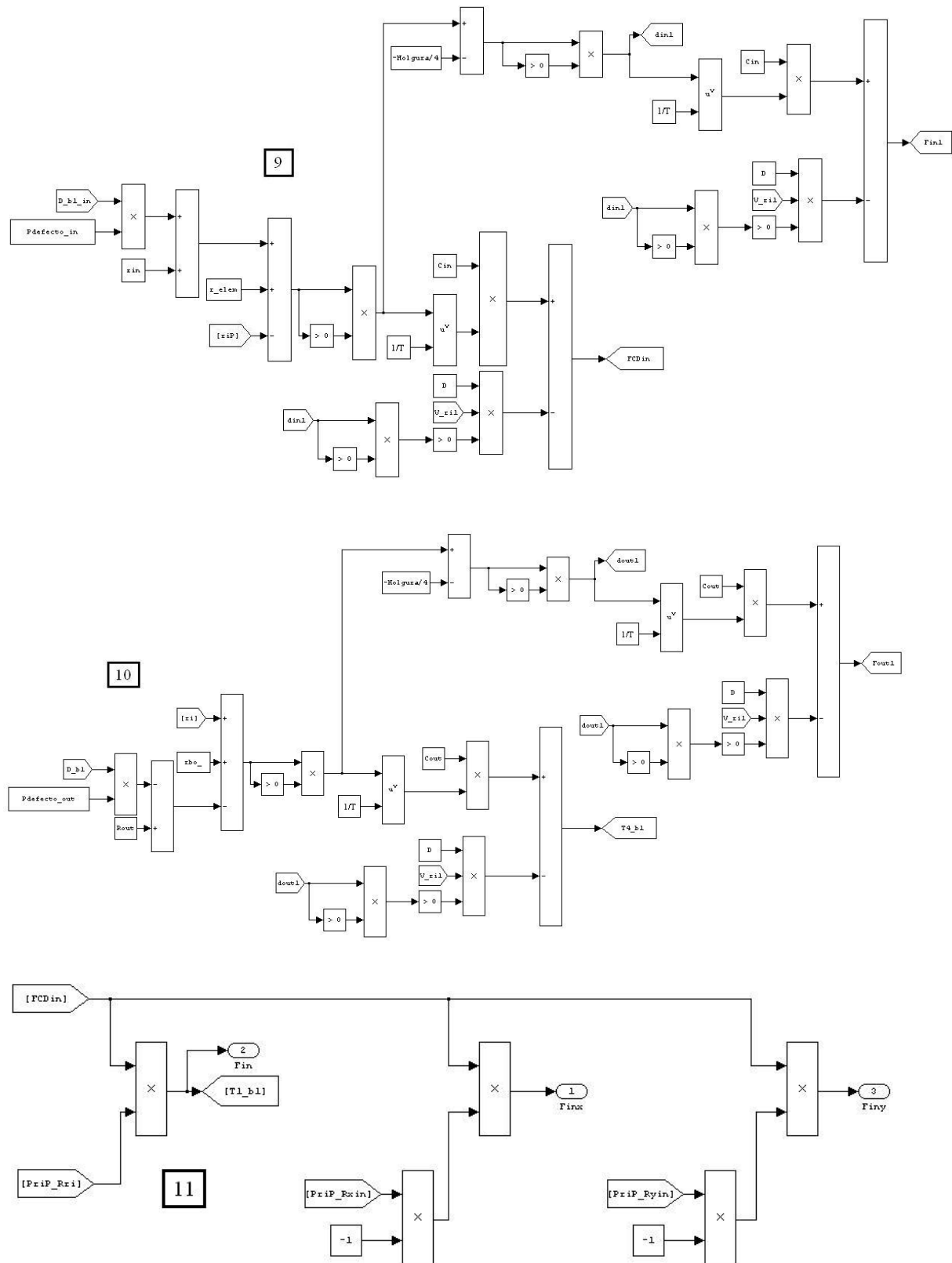


Figura 4.10. (bis 2) Diagrama de bloques que implementa las ecuaciones 3.112, 3.113, 3.114 (3 de 3).

Las entradas del bloque son:

- La posición angular del elemento rodante, a_{bi} , que se corresponden con los ángulos de posiciones del elemento rodante α_i .
- La coordenada del C.A.I, según el eje x , xin .
- La coordenada del C.A.I, según el eje y , yin .
- La velocidad angular de la jaula, w_{jaula} que se corresponde con ω_{jaula} .

Las salidas del bloque son:

- Las componentes de la fuerza radial según el eje x , Fin_i . (V.L.).
- Las componentes de la fuerza radial según el eje y , Fin_i . (V.L.).
- La posición radial de los elementos rodantes con respecto al C.A.I, r_i . (V.L.).
- También se obtienen los parámetros Fin_i , $Fout_i$, din y $dout$, que representan las fuerzas radiales sobre el anillo interior y exterior y las deformaciones interior y exterior, respectivamente, de los elementos rodantes durante su movimiento (V.G.).

4.1.3 Modelos de 11 G.D.L: Diagramas de bloques en Newton y Lagrange

Al igual que ocurre en los modelos de 5 G.D.L. las ecuaciones que rigen los modelos de Newton y Lagrange son similares en lo que a ecuaciones de fuerzas y deformaciones se refieren, difiriendo únicamente en las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de los elementos rodantes. Por tanto, este apartado contendrá los bloques comunes a los dos modelos, y después se detallarán, para cada uno de los sistemas de ecuaciones, los bloques correspondientes.

4.1.3.1 Bloques generales

Cada uno de los casos cuenta con 6 bloques principales y los bloques de muestra de resultados, cuyo esquema general se muestra en las Figuras 4.11 y 4.11 (bis 1).

- Bloque Movimiento.
- Bloque Ecuación 1.
- Bloque Ecuación 2.
- Bloque Elemento 1, Elemento 2 y Elemento 3.
- Bloques de muestra de resultados (fuerzas, desplazamientos, deformaciones...).

CAPÍTULO 4: IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO EN MATLAB-SIMULINK

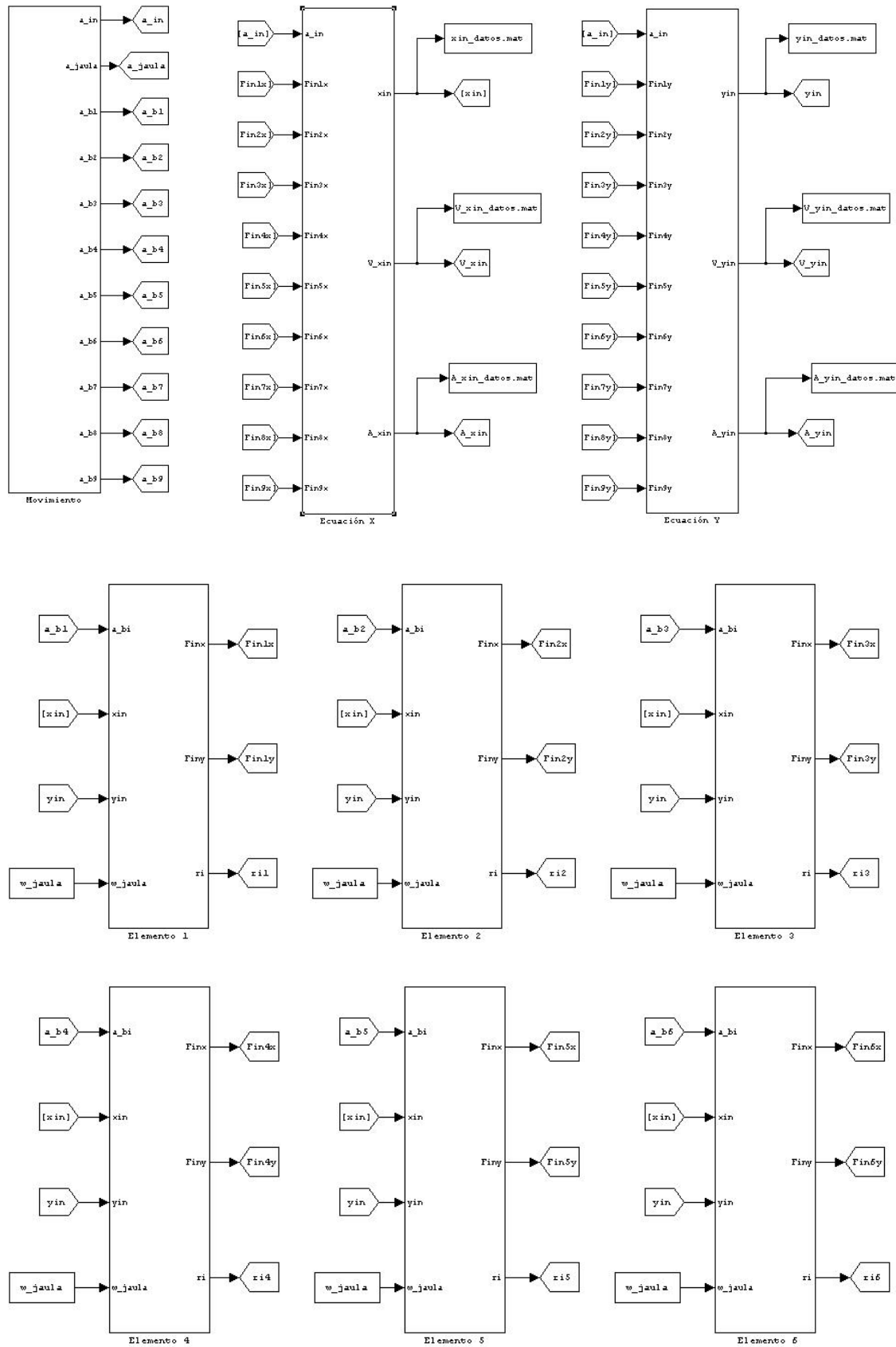


Figura 4.11. Bloques Movimiento, Ecuaciones X e Y y Elementos 1- 9. (1 de 2)

4.1 PROCESO DE IMPLEMENTACIÓN

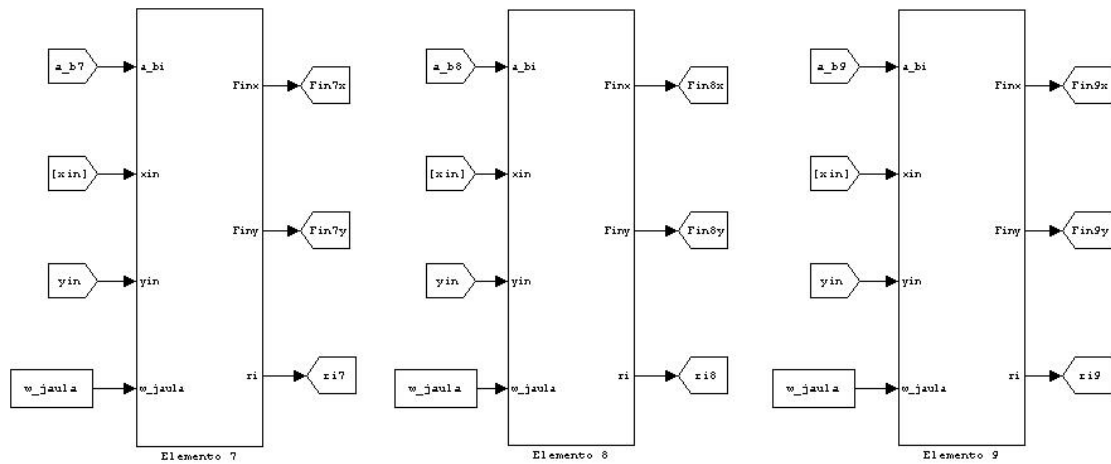


Figura 4.11. (bis) Bloques Movimiento, Ecuaciones X e Y y Elementos 1- 9. (2 de 2)

A semejanza que en los modelos de 5 G.D.L. también se incluyen los bloques Scope para la visualización inmediata de los resultados de la simulación (Figuras 4.12 y 4.12 (bis)).

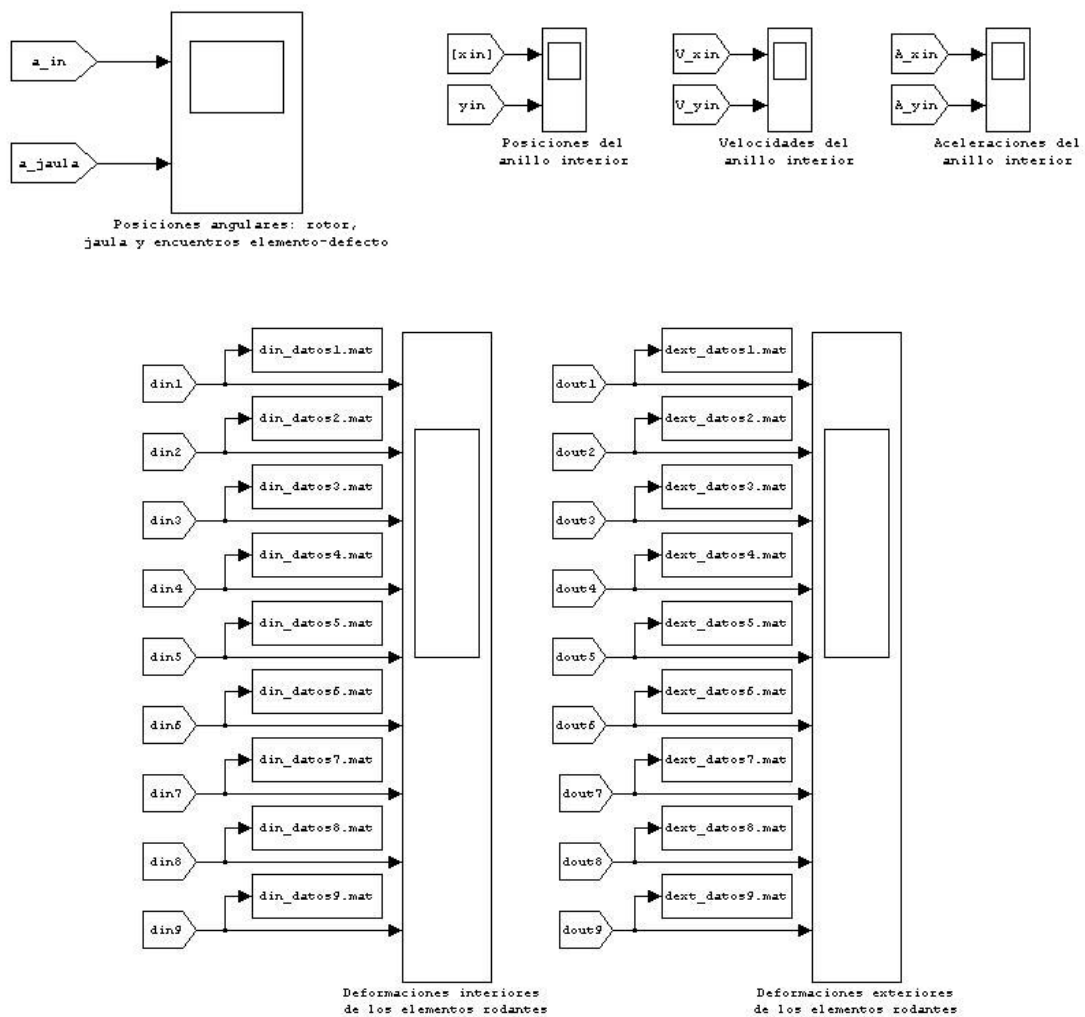


Figura 4.12. Bloques visualizadores de los parámetros calculados por el sistema. (1 de 2)

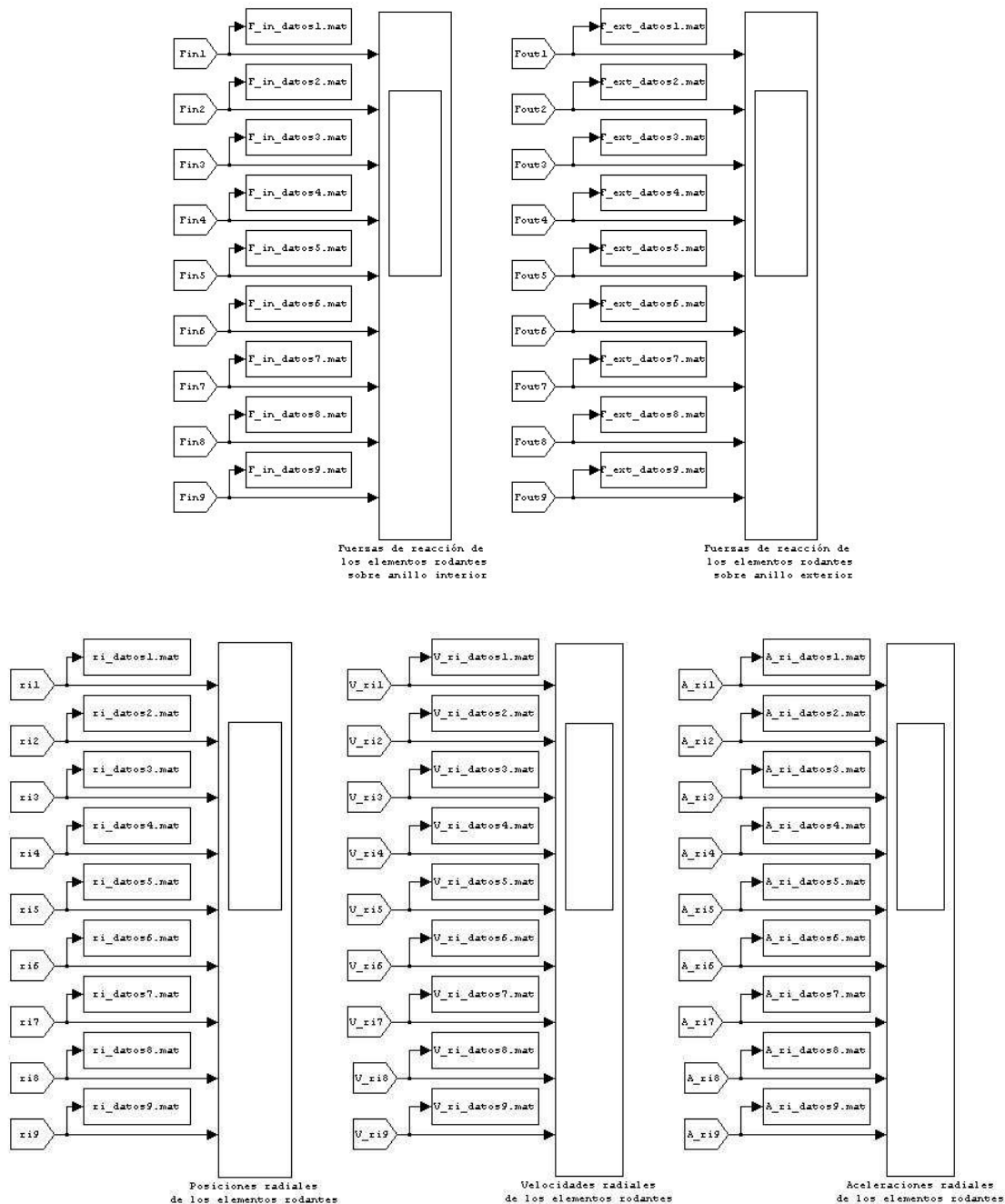


Figura 4.12. (bis) Bloques visualizadores de los parámetros calculados por el sistema. (2 de 2)

- Posición angular del rotor y de la jaula.
- Posición del C.A.I.
- Velocidad del C.A.I.
- Aceleración del C.A.I.
- Deformaciones interiores de los elementos rodantes.
- Deformaciones exteriores de los elementos rodantes.
- Fuerzas sobre el anillo interior, ejercidas por los elementos rodantes.
- Fuerzas sobre el anillo exterior, ejercidas por los elementos rodantes.

- Distancia centro de anillo exterior- centro del elemento rodante.
- Velocidad radial de los elementos rodantes.
- Aceleración radial de los elementos rodantes.

4.1.3.2 Bloque Movimiento

En éste bloque, mostrado en las Figuras 4.13, 4.14 y 4.15, se definen todos los parámetros correspondientes al movimiento del sistema. Las entradas del bloque son las frecuencias del rotor y de la jaula (f_{in} y f_{jaula}), pasados como parámetro a un generador de formas de onda. Los bloques que generan el movimiento angular del sistema son básicamente los mismos que en el caso de 3 elementos rodantes, con la salvedad de que deben añadirse 6 nuevos conjuntos de bloques por cada nuevo elemento. El funcionamiento es exactamente igual, y se muestran conjuntamente los bloques de generación de movimiento y simulación de defectos.

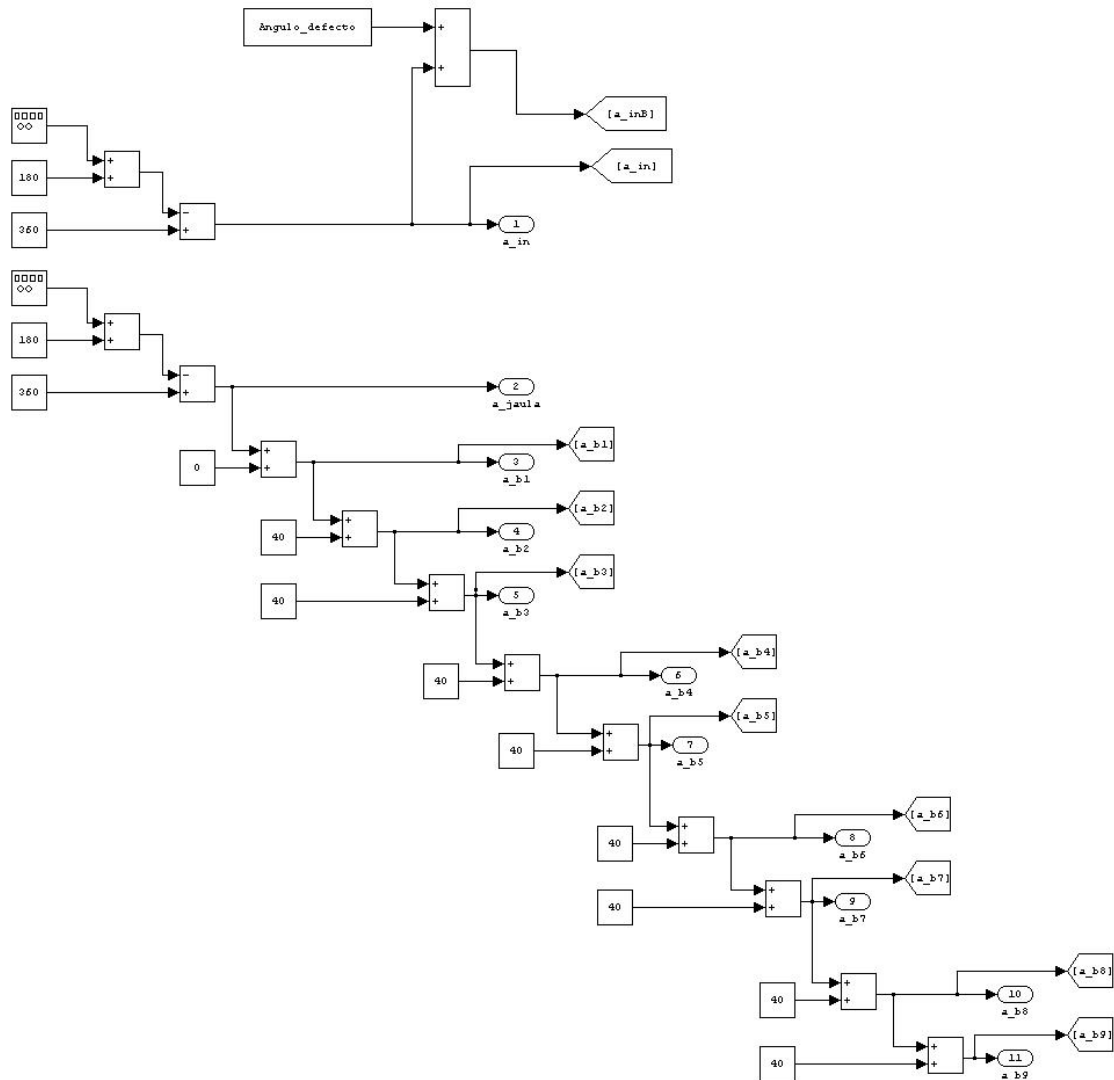


Figura 4.13. Bloques generadores del movimiento del rotor y los elementos rodantes.

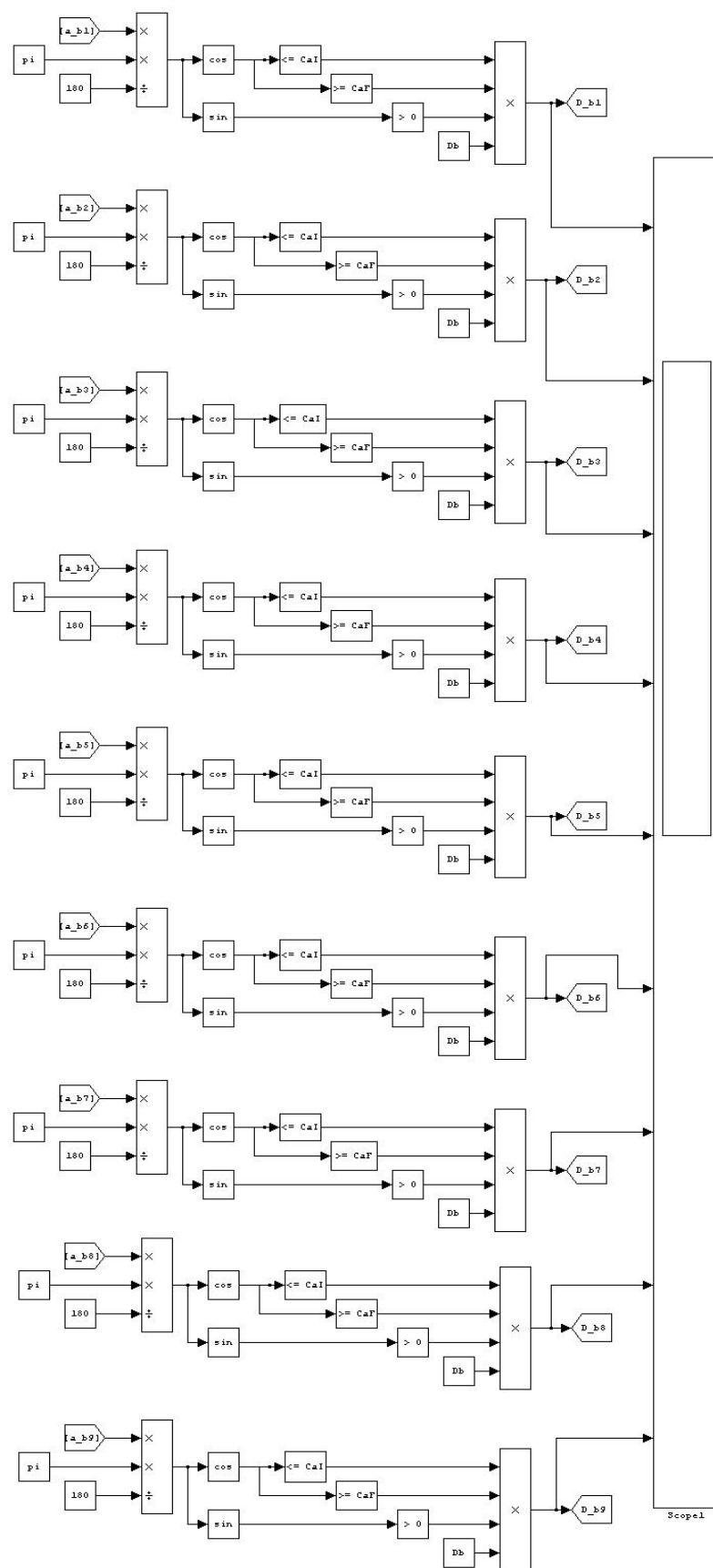


Figura 4.14. Diagrama de bloques para el cálculo de los encuentros elemento rodante-defecto en pista exterior.

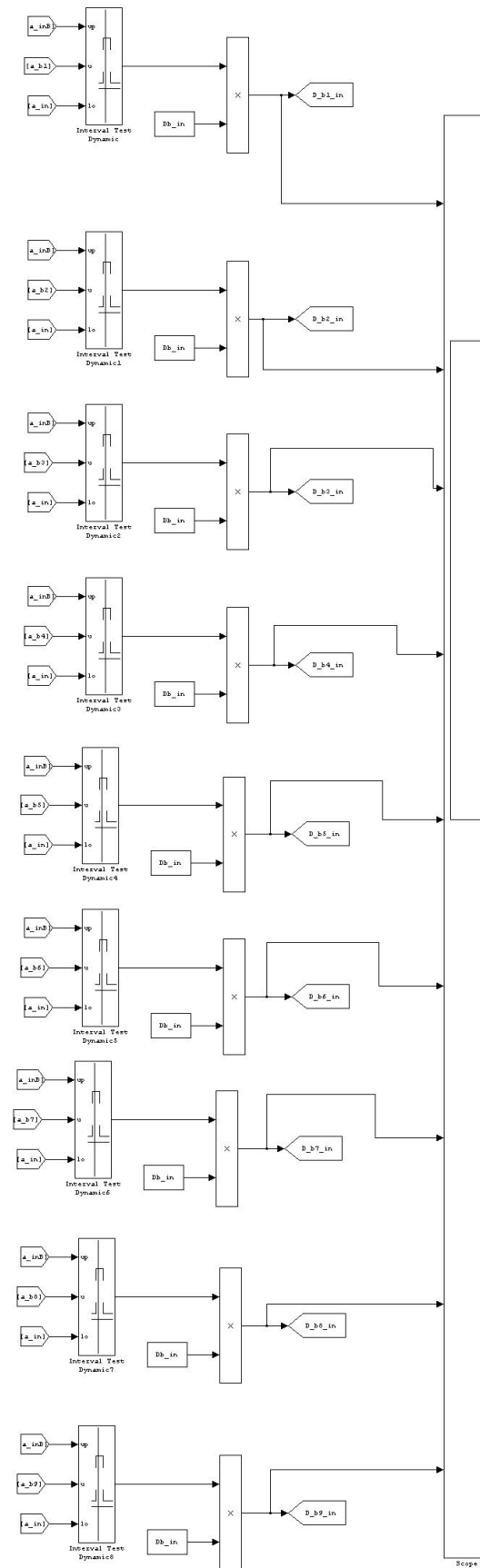


Figura 4.15. Diagrama de bloques para el cálculo de los encuentros elemento rodante-defecto en pista interior.

Del parámetro que representa la velocidad de giro de la jaula (2), se derivan esta vez 9 desfases, correspondientes a las formas de onda que representan a los elementos rodantes del rodamiento: La primera en consonancia con la posición angular de la jaula, y las restantes desfasadas 40° cada una.

Las salidas del bloque son las siguientes.

- a_{in} , que corresponde al ángulo girado por el rotor α_{in} .
- a_{jaula} , que es el ángulo girado por la jaula del rodamiento α_{jaula} .
- a_{b1} , posición angular del elemento rodante 1, que corresponde a α_1 .
- a_{b2} , posición angular del elemento rodante 2, que corresponde a α_2 .
- a_{b3} , posición angular del elemento rodante 3, que corresponde a α_3 .
- a_{b4} , posición angular del elemento rodante 4, que corresponde a α_4 .
- a_{b5} , posición angular del elemento rodante 5, que corresponde a α_5 .
- a_{b6} , posición angular del elemento rodante 6, que corresponde a α_6 .
- a_{b7} , posición angular del elemento rodante 7, que corresponde a α_7 .
- a_{b8} , posición angular del elemento rodante 8, que corresponde a α_8 .
- a_{b9} , posición angular del elemento rodante 9, que corresponde a α_9 .

4.1.3.3 Bloque Ecuación X

En este bloque (Figura 4.16) se realiza la integración de las ecuaciones 3.99 (Newton) y 3.115 (Lagrange), correspondientes al movimiento del C.A.I. en dirección x .

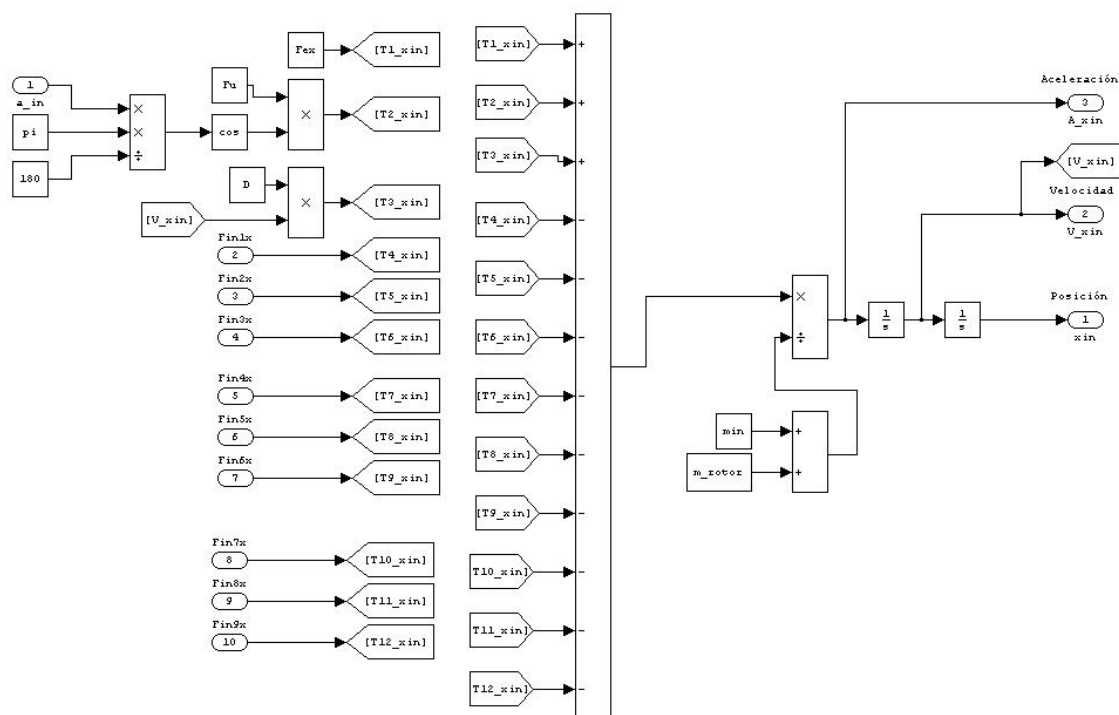


Figura 4.16. Diagramas de bloques para la implementación de la ecuación X.

Las entradas para el bloque son.

- La posición angular del rotor, a_{in} , que se corresponde con el ángulo α_{in} .
- Las componentes según la dirección x de las fuerzas de reacción de los elementos rodantes sobre el anillo interior $Fin1x$, $Fin2x$, $Fin3x$, $Fin4x$, $Fin5x$, $Fin6x$, $Fin7x$, $Fin8x$ y $Fin9x$.

El subbloque derecho representa la ecuación diferencial y su integración. Sus entradas son los resultados de los demás subbloques, que se guardan como parámetros con los siguientes nombres.

- Fuerzas exteriores sobre el rodamiento en la dirección x ($T1_xin$).
- Fuerzas de disequilibrio del rotor en dirección x ($T2_xin$).
- Amortiguamiento ($T3_xin$).
- Fuerzas interiores ejercidas por el elemento rodante sobre la pista interior ($T4_xin$, $T5_xin$, $T6_xin$, $T7_xin$, $T8_xin$, $T9_xin$, $T10_xin$, $T11_xin$, $T12_xin$).

Sus salidas son:

- La posición (V.L.), según la dirección x , del C.A.I, xin .
- La velocidad (V.L.), según la dirección x , del C.A.I, V_xin .
- La aceleración (V.L.), según la dirección x , del C.A.I, A_xin .

4.1.3.4 Bloque Ecuación Y

En este bloque (Figura 4.17) se realiza la integración de las ecuaciones 3.100 (Newton) y 3.116 (Lagrange), correspondientes al movimiento del C.A.I. en dirección y .

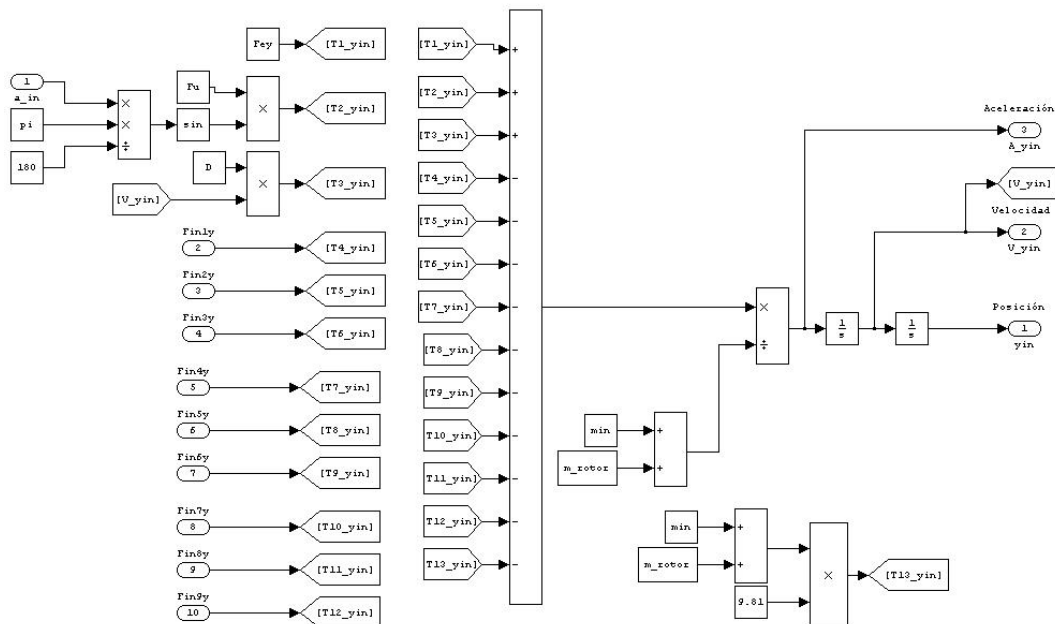


Figura 4.17. Diagramas de bloques para la implementación de la ecuación Y.

Las entradas al bloque son las siguientes.

- La posición angular del rotor, a_{in} , que se corresponde con el ángulo α_{in} .
- Las componentes según la dirección y de las fuerzas de reacción de los elementos rodantes sobre el anillo interior $Fin1y$, $Fin2y$, $Fin3y$, $Fin4y$, $Fin5y$, $Fin6y$, $Fin7y$, $Fin8y$ y $Fin9y$.

El subbloque derecho representa la ecuación general y su integración. Sus entradas son las siguientes.

- Fuerzas exteriores sobre el rodamiento en la dirección y ($T1_yin$).
- Fuerzas de desequilibrio del rotor en dirección y ($T2_yin$).
- Amortiguamiento ($T3_yin$).
- Fuerzas interiores ejercidas por el elemento rodante sobre la pista interna ($T4_yin$, $T5_yin$, $T6_yin$, $T7_yin$, $T8_yin$, $T9_yin$, $T10_yin$, $T11_yin$, $T12_yin$).
- Peso del anillo interior y del rotor ($T13_yin$).

Sus salidas son:

- La posición (V.L.), según la dirección y , del C.A.I, y_{in} .
- La velocidad (V.L.), según la dirección y , del C.A.I, V_yin .
- La aceleración (V.L.), según la dirección y , del C.A.I, A_yin (3).

4.1.3.5 Modelos de 11 G.D.L: Bloques Elemento para el modelo de Newton

Existen 9 bloques Elemento (1 por cada elemento rodante), que tienen la misma estructura que los bloques Elemento del caso de 5 G.D.L. con las mismas entradas, salidas y subbloques, por lo que no necesitan mayor explicación. Simplemente indicar que integran las ecuaciones 3.101, 3.102, 3.103, 3.104, 3.105, 3.106, 3.107, 3.108, y 3.109.

4.1.3.6 Modelos de 11 G.D.L: Bloques Elemento para el modelo de Lagrange

Existen 9 bloques Elemento (1 por cada elemento rodante), que tienen la misma estructura que los bloques Elemento del caso de 5 G.D.L. con las mismas entradas, salidas y subbloques, por lo que no necesitan mayor explicación. Simplemente indicar que integran las ecuaciones 3.117, 3.118, 3.119, 3.120, 3.121, 3.122, 3.123, 3.124, y 3.125.

4.1 Resumen de aportaciones

Cambios en el modelo original

Como punto de partida para la implementación en Simulink, se contó con unos modelos de rodamiento creados en la tesis de la que parte este proyecto, por lo que la principal labor fue depurar y mejorar el rendimiento de dichos modelos. El primer proceso fue realizar una inspección visual para comprobar si las ecuaciones teóricas se hallaban correctamente introducidas, ya que probablemente los archivos de partida sufrieran pequeños cambios durante las sucesivas modificaciones conducentes a determinar la sensibilidad de los diferentes parámetros, por lo que en algunas ecuaciones se detectaron fallos de implementación. Aún así, el programa simula de forma correcta el comportamiento del anillo interior, en lo que se refiere a frecuencias de oscilación, por lo cual el modelo virtual de partida se puede considerar como sólido pero con pequeños errores. Los mayores problemas se detectaron en las magnitudes alcanzadas por los parámetros generados por el programa:

1. Errores de unidades: Las ecuaciones tienen unidades de entrada de distinto orden al necesario.
2. Errores de implementación de ecuaciones: Los bloques del programa no se corresponden con la ecuación representada.

Errores de unidades

Éste se encuentra en la ecuación que implementa la fuerza centrífuga en los bloques bola. La ecuación de la fuerza centrífuga es:

$$F_c = \omega^2 \cdot r \cdot m_{bo}$$

Donde ω es la velocidad angular en rad/s del anillo interior, r es la distancia del elemento rodante al centro del anillo externo y m_{bo} es la masa del elemento rodante.

La unidad de longitud que se introduce en la ecuación es el metro, pero todos los parámetros de longitud que se obtienen en las ecuaciones están en milímetros (Figura 4.18), con lo cual la fuerza obtenida será 1000 veces mayor. La solución adoptada fue la división del parámetro r_i por 1000 (Figura 4.19).

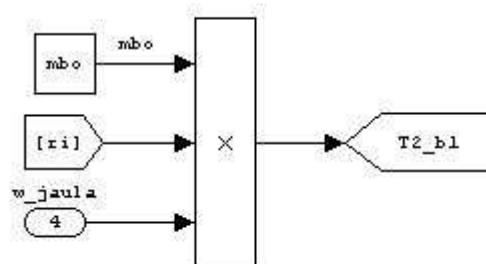


Figura 4.18. Esquema de bloques original para el cálculo de la fuerza centrífuga.

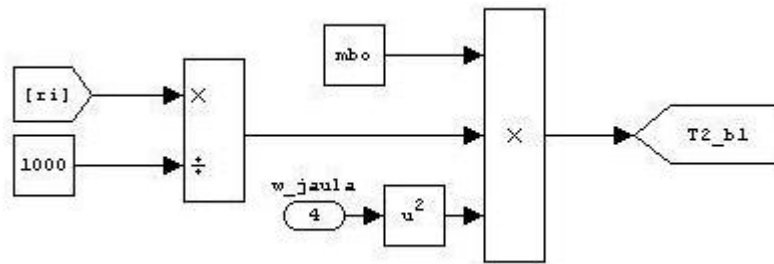


Figura 4.19. Esquema de bloques corregido para el cálculo de la fuerza centrífuga.

Para el correcto funcionamiento del modelo, es necesario introducir un cierto valor de holgura al modelo, que es incluido en el parámetro que representa el radio de la bola, a la hora del cálculo de las deformaciones de la bola. Éstas son las ecuaciones que gobiernan las deformaciones (3.41 y 3.42), que pueden ser más fácilmente entendidas si se observan las Figuras 3.15 y 3.16.

$$\delta_{in} = r_{in} + r_{bo} - \rho_i$$

$$\delta_{ex} = R_{out} - r_{bo} - r_i$$

Como puede verse, el movimiento del anillo interior provoca que la holgura deba ser tomada en cuenta, la cual se incluye en el parámetro r_{bo} , transformándolo en el parámetro r_{elem} como indica la ecuación siguiente, utilizado para el cálculo de deformaciones en el contacto elemento rodante-pista interior:

$$r_{elem} = r_{bo} + \frac{Holgura}{2}$$

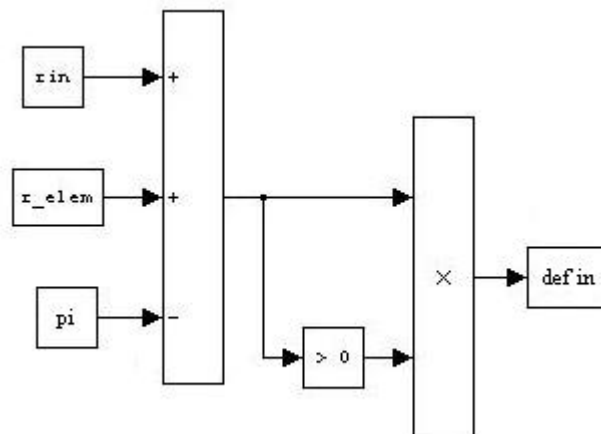


Figura 4.20. Esquema de bloques simplificado para el cálculo de las deformaciones interiores.

Sin embargo, los parámetros que se utilizan para calcular las deformaciones externas no hacen necesaria la inclusión de la holgura. Por tanto, el parámetro r_{bo} no sufre modificación alguna, quedando como r_{bo} en el diagrama.

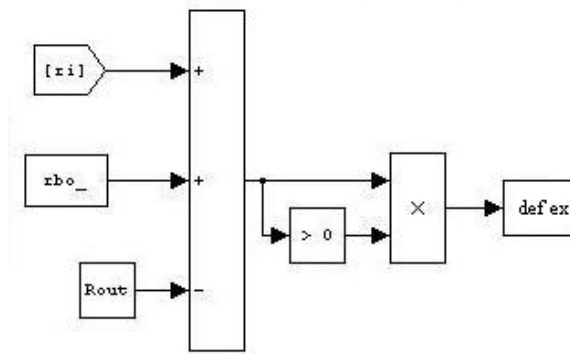


Figura 4.21. Esquema de bloques simplificado para el cálculo de las deformaciones exteriores.

Errores de implementación de ecuaciones

En la ecuación de la fuerza centrífuga se indica que la velocidad angular debe elevarse al cuadrado, pero aquí no aparece así, sino que se hace actuar directamente en la ecuación. La solución fue intercalar un bloque que eleva al cuadrado el parámetro.

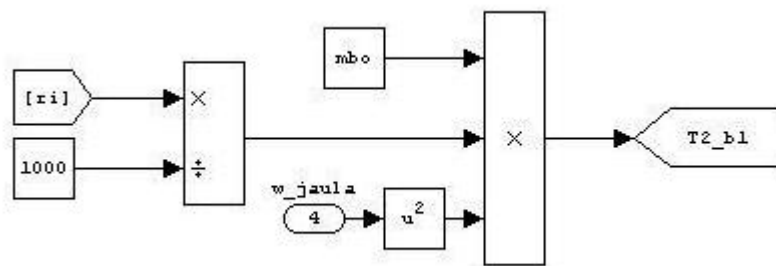


Figura 4.22. Esquema de bloques corregido para el cálculo de la fuerza centrífuga.

Globalmente esta ecuación presenta dos errores, aunque en su conjunto provoca que la fuerza centrífuga sea alrededor sólo 3-4 veces mayor, ya que en cierta medida se compensa el error de unidad con el de implementación.

En la ecuación que realiza el cálculo de ecuación correspondiente al peso de la bola, no se incluye la multiplicación por el seno de la posición de la bola (Figura 4.23), como se indica en la ecuación 3.47. La inclusión del bloque que lo representa transformaría el bloque en lo mostrado en la Figura 4.24. Esta modificación apenas provoca variación en los resultados, por ser una fuerza muy pequeña, comparada con el resto de componentes.

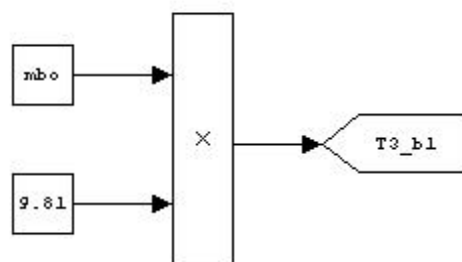


Figura 4.23. Esquema de bloques original para el cálculo del peso de los elementos rodantes.

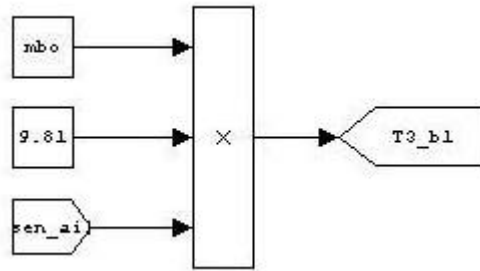


Figura 4.24 .Esquema de bloques corregido para el cálculo del peso de los elementos rodantes.

El módulo de cálculo de fuerzas por deformación, tanto interior como exterior, implementa la siguiente ecuación.

$$Fin_i = C_{in} \cdot \delta in_i^{3/2} - D_{in} \cdot \dot{\rho}_i \cdot \Gamma_{in}$$

$$Fout_i = C_{out} \cdot \delta out_i^{3/2} - D_{out} \cdot \dot{\rho}_i \cdot \Gamma_{out}$$

Donde

$$\Gamma_{in} = 0 \quad \text{si } \delta_{in} < 0; \quad \Gamma_{in} = 1 \quad \text{si } \delta_{in} \geq 0$$

$$\Gamma_{out} = 0 \quad \text{si } \delta_{out} < 0; \quad \Gamma_{out} = 1 \quad \text{si } \delta_{out} \geq 0$$

El problema que se presenta es el concerniente a la aplicación de la condición de amortiguamiento. Según la ecuación, ésta sólo actúa si existe deformación, mientras que en la tesis original siempre lo hace. El problema se solventa con el bloque de módulos de la Figura 4.25, recuadrado en rojo, que debe incluirse en todos los módulos de cálculo de fuerzas de contacto en anillo interior y exterior.

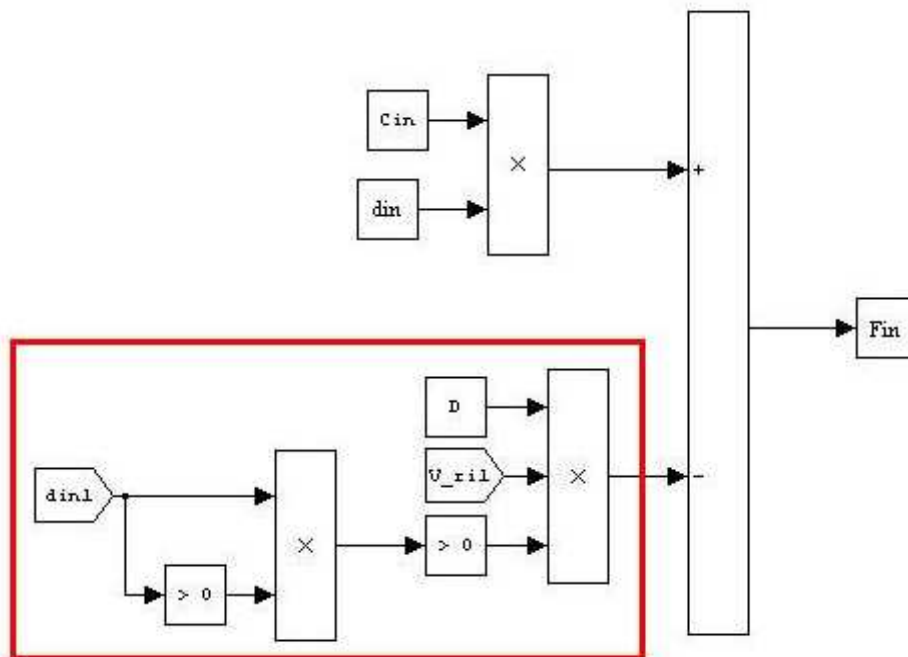


Figura 4.25. Adición de bloques para el cálculo de fuerzas interiores.

Por último, la ecuación del cálculo del parámetro ρ_i presenta un error grave: la no inclusión del parámetro r_i en los bloques que representan la siguiente ecuación. El segmento que se muestra del diagrama de bloques de la Figura 4.10 (número 5) es el correspondiente a los términos de la ecuación que se hallan resaltados en negrita:

$$\rho_i^2 = r_i^2 + x_{in}^2 + y_{in}^2 - 2 \cdot r_i \cdot \cos(\alpha_i) \cdot x_{in} - 2 \cdot r_i \cdot \sin(\alpha_i) \cdot y_{in}$$

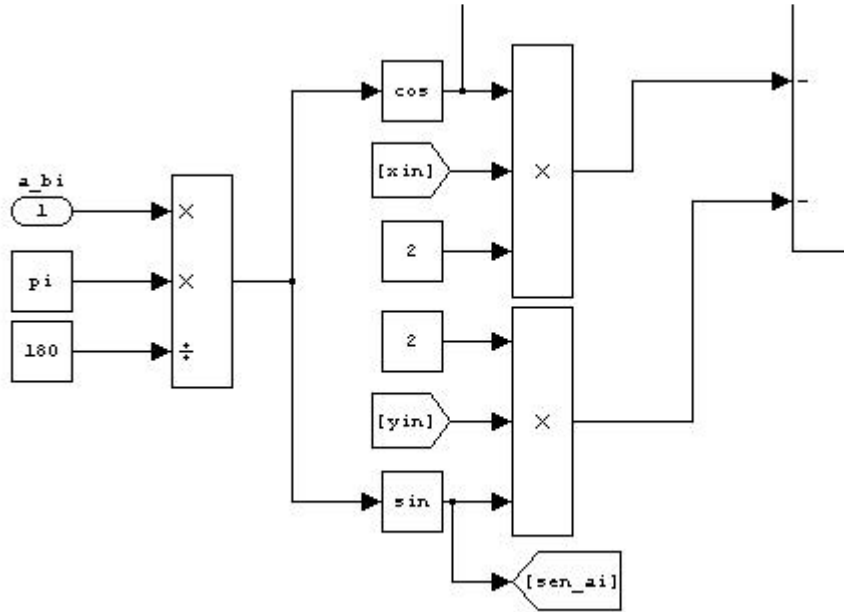


Figura 4.26. Fragmento del esquema de bloques original para el cálculo del parámetro π_i .

La no inclusión del parámetro r_i (Figura 4.26) provoca que la operación realizada en el bloque suma sea mayor que la real. Es decir, la multiplicación por el parámetro r_i provoca que los términos que restan sean menores, con lo cual las deformaciones obtenidas serán mucho mayores que las reales, fenómeno que podrá apreciarse en el capítulo siguiente. La representación correcta del bloque es la observada en la Figura 4.27:

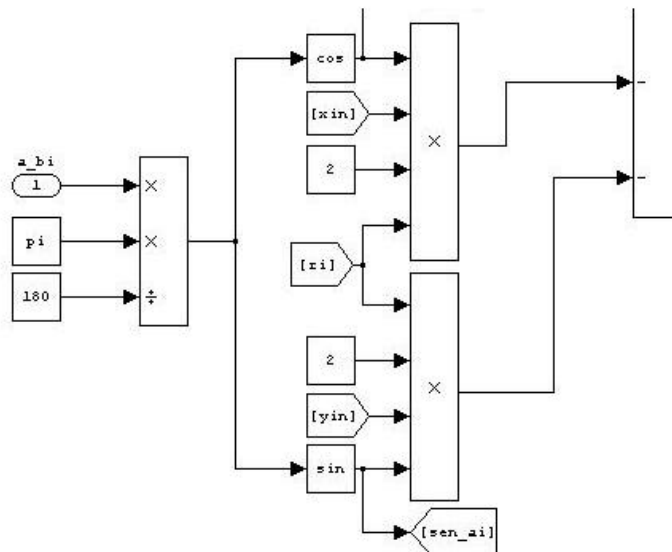


Figura 4.27. Fragmento del esquema de bloques corregido para el cálculo del parámetro π_i .

CAPÍTULO 4: IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO EN MATLAB-SIMULINK

Éstas son las modificaciones básicas que se le realizaron al modelo. Finalmente, se añadieron, para realizar el cálculo de fuerzas, un conjunto de bloques adicional, que serán comentados en el capítulo 5, al comparar los resultados de los modelos original y nuevo, en el apartado de fuerzas.

En conclusión, y teniendo en cuenta los archivos de inicio y su más que probable origen, puede decirse que los errores de estos modelos son en esencia pequeños errores de transcripción, y que los resultados incorrectos que se obtenían son fruto de una falta de depuración de errores.

Con esta implementación se realizaron todas las pruebas necesarias para comprobar el buen funcionamiento del sistema, que serán expuestas en el capítulo siguiente. Con esto, se habría alcanzado el objetivo principal del proyecto, pero se decidió continuar con la evolución de los modelos. El nuevo objetivo era conseguir una mayor facilidad de uso del programa, ya que hasta el momento la única forma de utilizarlo era:

1. Abrir el archivo *datos.m* en el que se definen las constantes del modelo (fuerzas, dimensiones, parámetros físicos...), modificar las constantes necesarias y cargar dicho archivo.
2. Abrir el modelo en Simulink, establecer el tiempo de funcionamiento y lanzar la simulación.
3. Para visualizar los resultados se utilizaban los bloques Scope, pero si se querían utilizar después de cerrar el programa Simulink, debían utilizarse programas auxiliares que cargasen los datos desde los archivos .mat generados por el modelo que almacenaban los resultados del modelo.
4. Para mayor dificultad, había que tener en cuenta que existen parámetros, como las masas o las constantes de rigidez, que dependen de otros parámetros, con lo cual, de no ser variados en su justa medida, dan lugar a simulaciones que no pueden otorgar resultados exactos.

Por todas estas razones, se dio un paso más en la mejora del programa, aportando los módulos siguientes.

Implementación en el entorno visual

Como se expuso antes, para facilitar la ejecución del programa y la introducción de datos del sistema, se integraron todos los programas relacionados con la simulación y cálculo de parámetros en un entorno visual, utilizando el módulo GUI de Matlab, cuyo resultado final fue el programa SIMROD. A continuación, y mediante capturas de pantalla, se muestra un primer esbozo del mismo. En el capítulo 6 se incluye un pequeño manual para su correcta utilización.

Subprogramas de cálculo de parámetros

Para complementar el programa y automatizar más aún el cálculo de ciertas constantes, se introdujeron una serie de subprogramas para obtener parámetros dependientes de otras constantes, que anteriormente eran introducidos a mano, sin tener en cuenta dichas relaciones.

La primera de ellas es la introducción de un módulo que calcula, en función de las dimensiones geométricas del rodamiento y aplicando la ecuación 3.27, las constantes de rigidez del rodamiento.

La segunda aportación es la automatización del cálculo de las constantes X_{in_O} y Y_{in_O} , en función de las fuerzas externas. Anteriormente, estos parámetros eran variables por el usuario, pero no representaba una situación real, puesto que la posición inicial del C.A.I. no es una característica que pueda variarse a voluntad con facilidad en la realidad. Por tanto, se decidió que estos parámetros fuesen calculados de forma automática a partir de las fuerzas externas, las características físicas del rodamiento y la posición inicial de las bolas.

Si se acepta que el modelo no tiene holgura, el desplazamiento que sufre el C.A.I. antes de comenzar su funcionamiento sólo será debido a la deformación que sufran sus elementos rodantes en dirección de la fuerza resultante. Sin embargo, no pueden utilizarse las constantes de rigidez interior y exterior, ya que trabajan simultáneamente, por lo que se calcula la constante de rigidez equivalente, la asociación en serie de las dos constantes de rigidez (Figura 4.29). Contando con que el ángulo β se considera 0, se considera que las dos constantes trabajan sobre la misma línea.

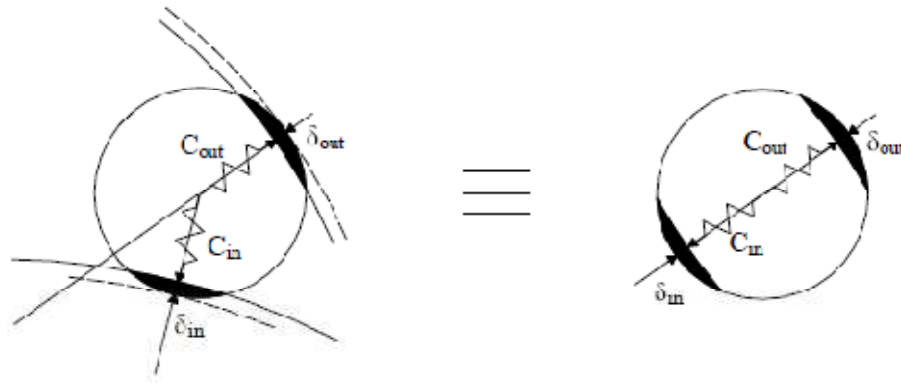


Figura 4.28. Esquema de la asociación de constantes de rigidez en serie, considerando $\beta=0$.

En primer lugar, la deformación sufrida por un elemento obedece a la ecuación 3.8:

$$\delta_r = \delta_i + \delta_o$$

La deformación puede ser expresada como se expone en la ecuación 3.7:

$$\delta_n = K_n \cdot Q^T$$

Si la fuerza Q es la misma para las dos deformaciones, δ_i y δ_o , queda que:

$$F = C_{in} \delta_i^T = C_{out} \delta_o^T$$

Sustituyendo en la ecuación 3.8:

$$\delta_r = \frac{F^T}{C_{in}^T} + \frac{F^T}{C_{out}^T} = F^T \cdot \left(\frac{1}{C_{in}^T} + \frac{1}{C_{out}^T} \right) = F^T \cdot \frac{1}{C_{eq}^T}$$

Donde

$$\frac{1}{C_{eq}^T} = \frac{1}{C_{in}^T} + \frac{1}{C_{out}^T}$$

Despejando

$$C_{eq} = \left(\frac{1}{C_{in}^T} + \frac{1}{C_{out}^T} \right)^{-\frac{1}{T}}$$

Por simplificación, se considera que la constante de rigidez hallada es constante a lo largo de toda la circunferencia del rodamiento, por lo que la deformación sufrida ante las fuerzas exteriores será.

$$\delta_r = C_{eq} \cdot Q^T$$

Si la fuerza Q resultante tiene un módulo F_{res} y una dirección determinada por un ángulo α_{res} , las posiciones iniciales del rotor serán.

$$X_{in_o} = \delta_r \cdot \cos(\alpha_{res})$$

$$Y_{in_o} = \delta_r \cdot \sin(\alpha_{res})$$

Más tarde se consideró que este desplazamiento inicial podía influir en el modelo mediante la introducción de una fuerza de desequilibrio adicional. El siguiente esquema de la Figura 4.28 ilustra la explicación:

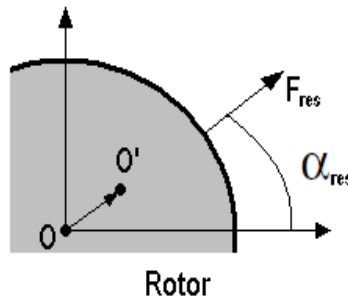


Figura 4.29. Esquema del desplazamiento del C.A.I. causa por las fuerzas externas.

Al actuar una fuerza externa sobre el rodamiento F_{res} con un ángulo α_i , el rotor se desplaza una distancia igual a:

$$\overline{OO'} = \sqrt{X_{in_o}^2 + Y_{in_o}^2}$$

Este desplazamiento generará una fuerza adicional de desequilibrio del rotor, que deberá ser sumada a la que sea introducida por el usuario, gobernada por la siguiente ecuación:

$$F_{des} = \omega_{rotor}^2 \cdot m_{rotor} \cdot \overline{OO'}$$

Otra aportación realizada al modelo fue la inclusión de la posibilidad de realizar simulaciones para elementos rodantes de tipo cilindro. La modificación se realizó incluyendo una nueva fórmula para calcular constantes de rigidez (distintas de las de las bolas), y la inclusión de las fórmulas de cálculo de las masas. La fórmula y procedimiento de cálculo para elementos rodantes del tipo bola se expuso en el capítulo 3. El procedimiento para el cálculo de la constante de rigidez de los cilindros es más simple, ya que se reduce a una sola constante, gobernada por la fórmula siguiente:

$$K_l = 7.86 \cdot 10^4 \cdot l^{8/9}$$

Donde l es la longitud del cilindro. Para su uso en el programa, se inicializan las variables C_{in} y C_{out} con el valor calculado por esta fórmula.

Además, según la ecuación 3.7, existe un parámetro T , diferente según el tipo de elemento rodante. En origen el modelo, al estar adaptado para realizar simulaciones con elementos rodantes de tipo bola, siempre lo inicializaba a $2/3$ (de hecho, era una constante y no un parámetro). En este proyecto, dependiendo del elemento rodante deseado:

- Elemento tipo bola: $T=2/3$.
- Elemento tipo rodillo: $T=0.9$.

El tipo de elemento se elige en una de las pantallas del entorno visual, que se describe más adelante.

Por otra parte, al variar las dimensiones del rodamiento o de sus elementos rodantes, tanto las nuevas dimensiones geométricas como la masa de los elementos rodantes y de las pistas, son recalculadas automáticamente, partiendo de unas dimensiones establecidas. Esto evita que se produzcan incongruencias en los datos de entrada. Por ejemplo, se podría variar el tamaño del elemento rodante, pero no hacer lo propio con su masa.

- Masa inicial del anillo interior: 0.061 kg.
- Masa inicial del anillo exterior: 0.075 kg.
- Masa inicial del elemento rodante: 0.0035 kg.
- Diámetro inicial del anillo interior: 36.5 mm.
- Diámetro inicial del anillo exterior: 55.5 mm.
- Diámetro inicial del anillo interior: 9.5 mm.
- Longitud inicial del rodillo: 12 mm.

Para ambos casos

$$\text{Diámetro pista interior} = D_{medio} - D_{elemento}$$

$$\text{Diámetro pista exterior} = 2 \cdot \left(\frac{D_{pista interior}}{2} + D_{elemento} \right)$$

Para el caso de elementos rodantes tipo bola.

$$Masa\ anillo\ interior = 0.061 \cdot \frac{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \frac{(D_{anillo\ int\ nuevo})^3}{8}}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \frac{(36.5)^3}{8}}$$

$$Masa\ anillo\ exterior = 0.075 \cdot \frac{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \frac{(D_{anillo\ ex\ nuevo})^3}{8}}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \frac{(55.5)^3}{8}}$$

$$Masa\ bola = 0.0035 \cdot \frac{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \frac{(D_{bola\ nuevo})^3}{8}}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \frac{(9.5)^3}{8}}$$

Simplificando:

$$Masa\ anillo\ interior = 0.061 \cdot \left(\frac{D_{anillo\ int\ nuevo}}{36.5}\right)^3$$

$$Masa\ anillo\ exterior = 0.075 \cdot \left(\frac{D_{anillo\ ex\ nuevo}}{55.5}\right)^3$$

$$Masa\ bola = 0.0035 \cdot \left(\frac{D_{bola\ nuevo}}{9.5}\right)^3$$

Para el caso de elementos rodantes tipo rodillo.

$$Masa\ anillo\ interior = 0.061 \cdot \frac{\pi \cdot \frac{(D_{anillo\ int\ nuevo})^2}{4} \cdot L_{rod\ nuevo}}{\pi \cdot \frac{(0.0365)^2}{4} \cdot 12}$$

$$Masa\ anillo\ exterior = 0.075 \cdot \frac{\pi \cdot \frac{(D_{anillo\ ex\ nuevo})^2}{4} \cdot L_{rod\ nuevo}}{\pi \cdot \frac{(0.0365)^2}{4} \cdot 12}$$

$$Masa\ rodillo = 0.0035 \cdot \frac{\pi \cdot \frac{(D_{rodillo\ nuevo})^2}{4} \cdot L_{rod\ nuevo}}{\pi \cdot \frac{(0.0365)^2}{4} \cdot 12}$$

Simplificando

$$Masa\ anillo\ interior = 0.061 \cdot \left(\frac{D_{anillo\ int\ nuevo}}{0.0365}\right)^2 \cdot \frac{L_{rod\ nuevo}}{12}$$

$$Masa\ anillo\ exterior = 0.075 \cdot \left(\frac{D_{anillo\ ex\ nuevo}}{0.0365}\right)^2 \cdot \frac{L_{rod\ nuevo}}{12}$$

$$Masa\ rodillo = 0.0035 \cdot \left(\frac{D_{rodillo\ nuevo}}{0.0365}\right)^2 \cdot \frac{L_{rod\ nuevo}}{12}$$

Capítulo 5

Pruebas de estabilidad-linealidad

5.1. Análisis de resultados de los modelos

Una vez se han implementado los modelos, es necesario comprobar si los resultados que genera son aptos para ser usados en casos reales. Además, hay que tener en cuenta cualquiera de los modelos parte de unas suposiciones y unas condiciones que simplifican el modelo, ya que generar un modelo real de un rodamiento exige ecuaciones muy complejas. Solamente el hecho de considerar el ángulo β igual a 0 en el modelo de Newton reduce el hecho de tener en cuenta un factor que varía constantemente en el tiempo, añadiendo un grado de libertad más al problema. Es muy posible que el modelo sólo sea válido para un cierto abanico de valores, o que resulte poco fiable para ciertos parámetros, por lo que evaluar los modelos con objeto de conocer las limitaciones es esencial.

Sin embargo, aún con las simplificaciones realizadas, el modelo sigue dependiendo de demasiadas variables (constantes físicas, geométricas, condiciones externas...). Las combinaciones entre ellas pueden llegar a los centenares, dependiendo de las entradas que se quiera variar. Por ello, se reducirán el número de parámetros a la variación de las constantes de rigidez y las condiciones de funcionamiento externas al rodamiento, manteniendo las dimensiones del mismo. El objetivo es comprobar cuáles son los parámetros que más afectan al funcionamiento del modelo cuando varían y cuáles son los intervalos de utilización del programa.

CAPÍTULO 5: PRUEBAS DE ESTABILIDAD-LINEALIDAD

Para estudiar la validez del modelo y obtener los valores umbrales que permiten un correcto funcionamiento y simulación, se realizaron pruebas a los 4 modelos creados, así como a los 4 modelos originales. El proceso fue el siguiente:

1. Se eligieron 10 parámetros de estudio.
 - Posiciones en coordenadas x e y del C.A.I.
 - Velocidades en coordenadas x e y del C.A.I.
 - Aceleraciones en coordenadas x e y del C.A.I.
 - Deformaciones interiores del elemento 1.
 - Deformaciones exteriores del elemento 1.
 - Fuerzas interiores del elemento 1.
 - Fuerzas exteriores del elemento 1.

Se escogió el elemento 1 como podría haberse elegido cualquier otro, ya que los valores obtenidos son similares para cada uno de ellos.

2. Para cada modelo, se efectuaron simulaciones variando ciertos parámetros de entrada. El parámetro base de variación es la constante de rigidez C . Se determinan 5 valores de este parámetro, para los cuales el valor de referencia, calculado a partir de las dimensiones geométricas (apartado 3.2.1), es el tercero. En la práctica no es muy realista variar de esta forma dicha constante, pero es necesario para realizar los estudios. A partir de este punto, y por mayor comodidad, en ocasiones se hará referencia a los dos valores menores que el de referencia como valores “bajos” y a los dos mayores, valores “altos”.
 - a. $C_{in} = 402.570 \text{ N/mm}^{3/2}$; $C_{out} = 436.390 \text{ N/mm}^{3/2}$.
 - b. $C_{in} = 603.855 \text{ N/mm}^{3/2}$; $C_{out} = 654.585 \text{ N/mm}^{3/2}$.
 - c. $C_{in} = 805.140 \text{ N/mm}^{3/2}$; $C_{out} = 872.780 \text{ N/mm}^{3/2}$.
 - d. $C_{in} = 1.006.425 \text{ N/mm}^{3/2}$; $C_{out} = 1.090.975 \text{ N/mm}^{3/2}$.
 - e. $C_{in} = 1.207.710 \text{ N/mm}^{3/2}$; $C_{out} = 1.309.170 \text{ N/mm}^{3/2}$.
3. Para cada una de estas variaciones, se efectuaron a su vez 5 simulaciones, variando los parámetros de entrada que se muestran a continuación. El parámetro se introduce como un vector de un cierto número de valores en el modelo, con lo que para cada posición del vector, que representa un valor de la variable de entrada, se generará una gráfica. El conjunto de gráficas obtenidas se trata en el paso siguiente, permitiendo observar la tendencia sufrida con la variación de cada parámetro.
 - a. Fuerza exterior en dirección x : Vector de 50 posiciones, desde 0 hasta 5000 Newtons en incrementos de 100 N.
 - b. Fuerza exterior en dirección y : Vector de 50 posiciones, desde 0 hasta 5000 Newtons en incrementos de 100 N.
 - c. Fuerza de desequilibrio del rotor: Vector de 50 posiciones, desde 0 hasta 5000 Newtons en incrementos de 100 N.

5.1 ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LOS MODELOS

- d. Velocidad de giro del rotor: Vector de 100 posiciones, desde 60 hasta 6000 rpm en incrementos de 60 rpm.
 - e. Masa del rotor: Vector de 15 posiciones, desde 1 hasta 15 kg en incrementos de 1 kg.
4. Cada una de las simulaciones genera un número de gráficas para cada uno de los parámetros de estudio (posiciones, velocidades y aceleraciones del C.A.I, deformaciones...) igual al número de posiciones del vector de entrada. Para realizar el tratamiento de la información obtenida en las simulaciones, se creó el programa *compara_graf.m*, el cual se expone en los Anexos. Este programa tiene como entradas los vectores que se mencionan en el punto 3, pudiéndose introducir cualquier combinación de vectores iniciales, siempre que éstos tengan la misma longitud.
- a. **Rpm**: vector de velocidades de rotación introducidos para el análisis en Simulink.
 - b. **Fex, Fey, Fu**: vectores de fuerzas introducidos para usarse en Simulink.
 - c. **M_rotor**: vector de masas del rotor introducidos para usarse en Simulink.

La primera operación consiste en presentar ventanas correspondientes a las gráficas de coordenadas, velocidades y aceleraciones del C.A.I, fuerzas y deformaciones de los elementos rodantes, en las cuales se muestran las ondas que genera cada valor del vector utilizado como entrada (velocidad de rotación, fuerzas, masa del rotor). Con estas representaciones, visualmente puede apreciarse la tendencia sufrida al variar alguno de los parámetros de entrada, pero se hace necesario realizar un análisis más objetivo, ya que tal número de gráficas resulta excesivo. Esto se realiza en la segunda parte del programa.

En ella, se calcula el valor eficaz de la onda (o RMS) de todas las gráficas.

$$x_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2}$$

La razón de la elección de tal parámetro es la necesidad de promediar el valor de la señal, pero éstas son susceptibles de tener valores negativos, en especial las correspondientes al C.A.I. El RMS obtiene un promedio ignorando los efectos del signo de la señal, elevando cada valor al cuadrado (eliminando los signos negativos), calculando con ellos la media aritmética y aplicando la raíz cuadrada. Con esta operación, cada una de las gráficas queda reducida a un solo valor, y todos los valores, se generan una representación en la que se muestra la evolución del valor eficaz de las ondas.

Estas gráficas sirven para detectar las posibles inestabilidades que pueda tener el modelo, aunque su propósito principal es averiguar si la variación de los parámetros de entrada provoca variaciones del mismo orden y con qué relación. Esto es suficiente en el caso de los parámetros del C.A.I. pero se realizarán análisis complementarios para las fuerzas de contacto, ya que se pretende conocer cuánta diferencia existe entre las fuerzas exteriores y las de contacto calculadas y teóricas, para lo cual se necesita conocer el valor máximo alcanzado.

CAPÍTULO 5: PRUEBAS DE ESTABILIDAD-LINEALIDAD

5. Las gráficas que se generan se agrupan según su variable de entrada, mostrando en la misma gráfica los resultados de las 5 constantes de rigidez para un mismo parámetro. Así se aprecia de un vistazo la evolución seguida al variar C .
6. En total, se obtienen 50 gráficas por modelo. Ante el ingente volumen de información que supondría presentar 200 gráficas, más las correspondientes al modelo original (200 más), se ha optado por presentar únicamente un cierto número de resultados del modelo de 5 G.D.L. de Newton, mientras que el resto de información se plasma en el anexo.

Estas simulaciones permitirán responder las siguientes cuestiones:

1. Encontrar umbrales de utilización del programa, por encima o por debajo de los cuales los resultados no sean utilizables (estabilidad).
2. Evaluar las diferencias entre el modelo con errores corregidos y el original.
3. Comprobar si al aumentar un parámetro de entrada, la salida generada por el programa aumenta de forma proporcional (linealidad).
4. En la tesis original se llegó a la conclusión de que la simplificación del ángulo β en el modelo de Newton no generaba grandes diferencias con respecto al modelo de Lagrange. Aquí debe comprobarse si las modificaciones que se realizan siguen cumpliendo dicha condición.

Parámetros de simulación

Datos del rodamiento.

- Modelo de Newton: elementos rodantes del tipo bola.
- Masa de la pista interna: 0.061 kg.
- Masa de la pista externa: 0.075 kg.
- Masa de las bolas: 0.035 kg.
- Radio de la pista interior: 18.25 mm.
- Radio de la pista exterior: 27.75 mm.
- Radio de la bola: 4.75 mm.
- Constante de amortiguamiento: 0.01582 N/mm·s.
- Rodamiento sin defecto.





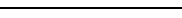
Parámetros de simulación

- Tiempo inicial: 0 s.
- Tiempo final: 1 s.
- Paso de simulación fijo: Fixed- step.
- Incremento del paso: 0.0001 s.
- Método de integración: Paso Fijo. ode4, correspondiente a la fórmula de Runge-Kutta de orden 4.

- Resto de parámetros: Por defecto.

A continuación se presenta la leyenda necesaria para identificar las gráficas de cada una de las constantes de rigidez.

Tabla 5.1 Leyenda de interpretación de las tablas de resultados.

Valor de C_{in}	Valor de C_{out}	Color de línea
402.570 N/mm ^{3/2}	436.390 N/mm ^{3/2}	
603.855 N/mm ^{3/2}	654.585 N/mm ^{3/2}	
805.140 N/mm ^{3/2}	872.780 N/mm ^{3/2}	
1.006.425 N/mm ^{3/2}	1.090.975 N/mm ^{3/2}	
1.207.710 N/mm ^{3/2}	1.309.170 N/mm ^{3/2}	

5.2 Gráficas de resultados

5.2.1 Aceleraciones del C.A.I.

En lo referente al movimiento del C.A.I. escogemos la aceleración para realizar el análisis. Las formas de las gráficas que se obtienen con dicha magnitud son similares con respecto a la posición y velocidad del C.A.I., aunque evidentemente con distintos valores. El motivo de la elección es que es una de las magnitudes normalmente controladas para realizar el mantenimiento predictivo.

5.2.1.1 Variación de Fex

Las aceleraciones para el caso de la fuerza exterior con dirección X presentan unas gráficas de tendencia casi lineal, con una gran inestabilidad a constantes de rigidez muy bajas, pero con el resto de simulaciones estables en todo el rango. Comparadas con las gráficas del modelo original, se observa que la inestabilidad es menor: salvando la constante de rigidez muy baja, presenta un rango de valores estables que abarca casi todo el espectro, mucho mayor que el de los modelos originales, alcanzando también valores menores (del orden de 1/3).

Por otro lado, la tendencia que siguen las gráficas puede considerarse lineal en las dos coordenadas, a diferencia de los modelos originales, en los que la coordenada Y presenta tendencia exponencial, lo que indica que posiblemente a altos valores de las fuerzas de entrada el modelo acabe siendo inestable.

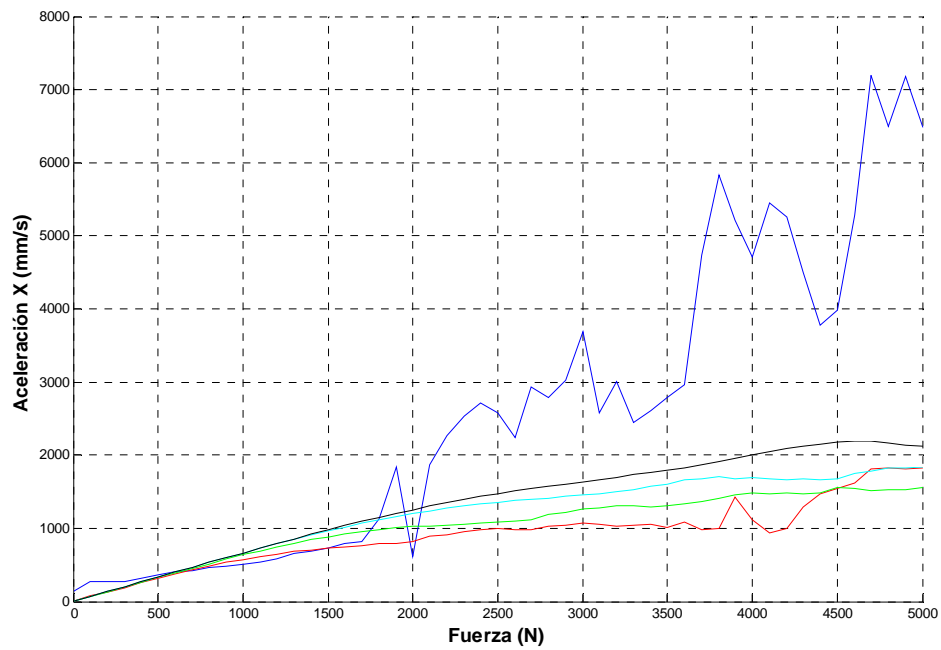


Figura 5.1. Evolución de aceleración del C.A.I, coordenada X; Modelo actual.

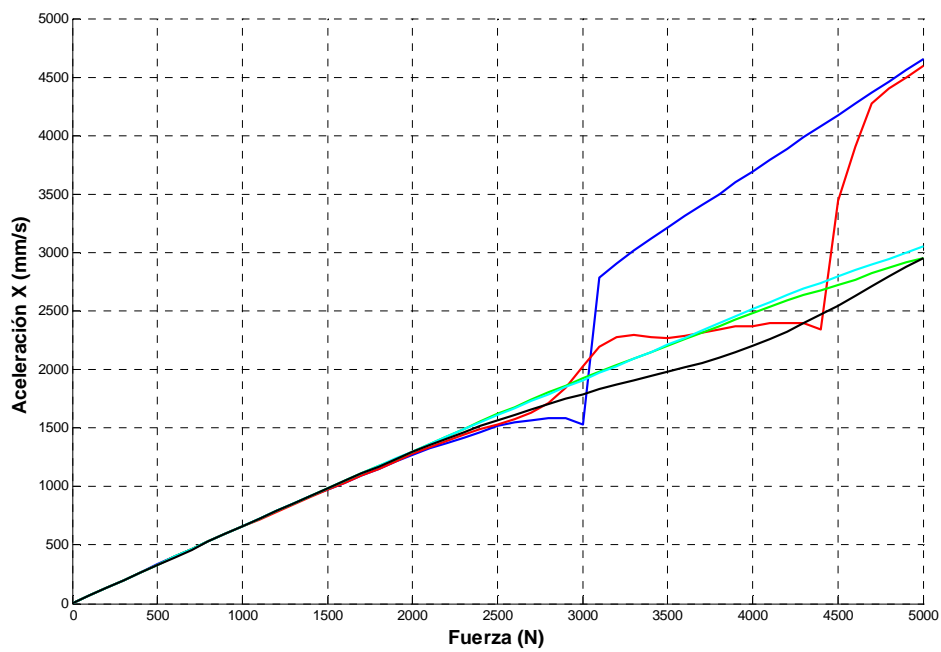


Figura 5.2 Evolución de aceleración del C.A.I, coordenada X; Modelo original.

5.2 GRÁFICAS DE RESULTADOS

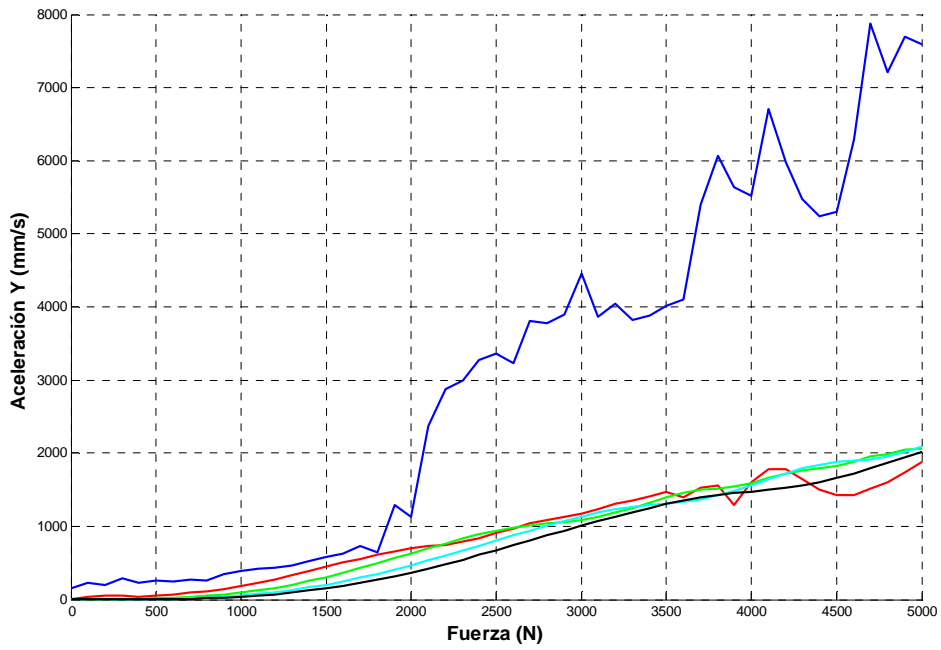


Figura 5.3. Evolución de aceleración del C.A.I, coordenada Y; Modelo actual.

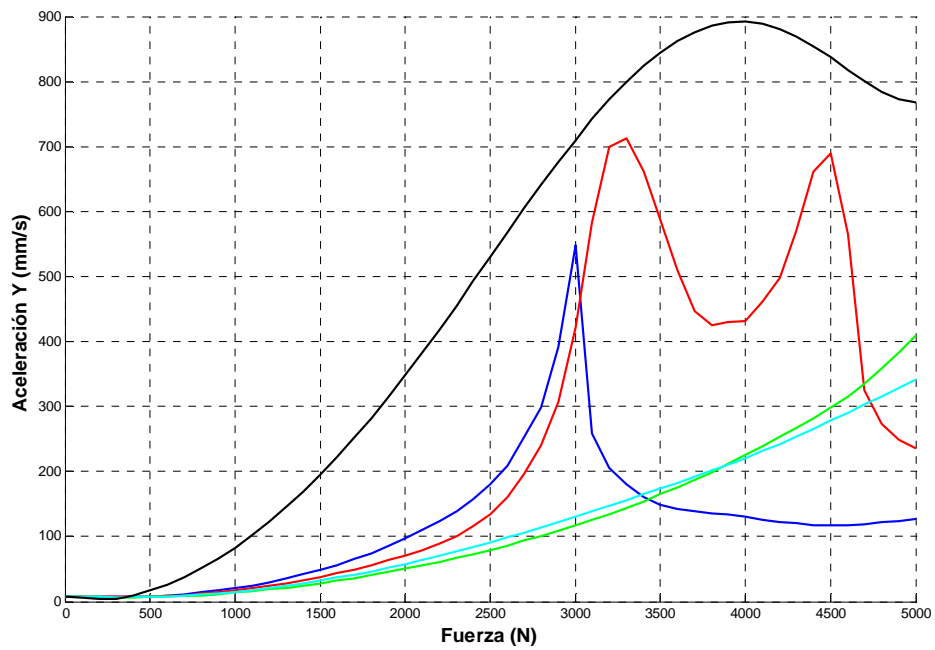


Figura 5.4. Evolución de aceleración del C.A.I, coordenada Y; Modelo original.

5.2.1.2 Variación de Fey

Las aceleraciones para el caso de la fuerza exterior con dirección y presentan una gran inestabilidad a constantes de rigidez muy bajas y ligeramente inestables con las bajas, pero con el resto de simulaciones estables en todo el rango. Además, mantienen la tendencia lineal que se vio en el apartado anterior. Comparadas con las gráficas del modelo original, se observa que la inestabilidad de estos modelos originales es mayor: es inestable a bajas constantes de rigidez y a las muy altas, y en las que resulta estable, alcanza valores superiores a los modelos actuales. La tendencia seguida en ellos es inversa que en el caso de fuerza exterior con dirección y, lo que hace suponer que puede existir inestabilidad en la coordenada x a altos valores de fuerzas exteriores.

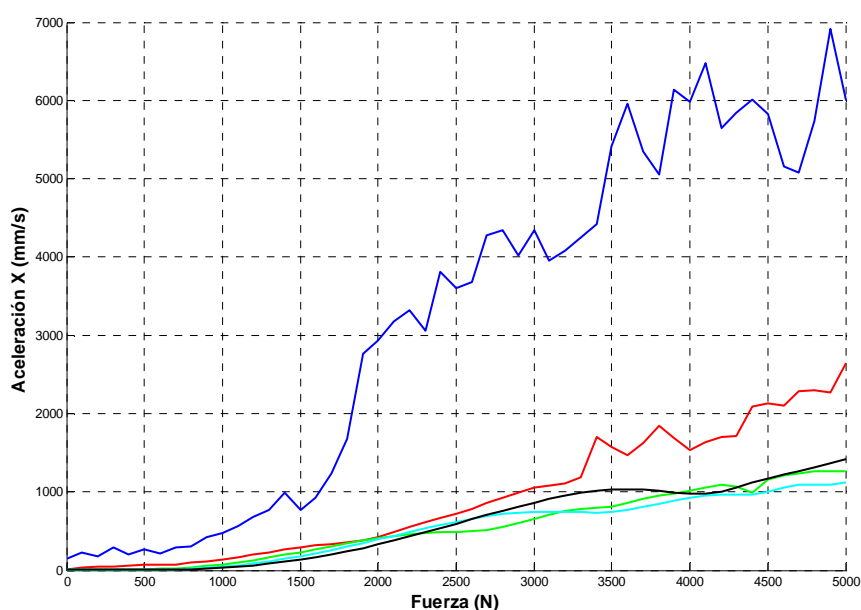


Figura 5.5. Evolución de aceleración del C.A.I, coordenada X; Modelo actual.

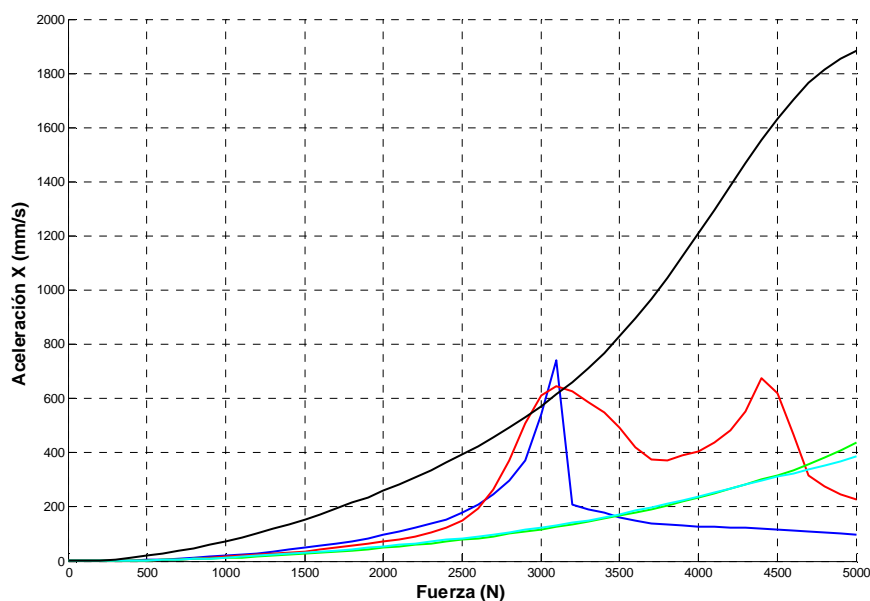


Figura 5.6. Evolución de aceleración del C.A.I, coordenada X; Modelo original.

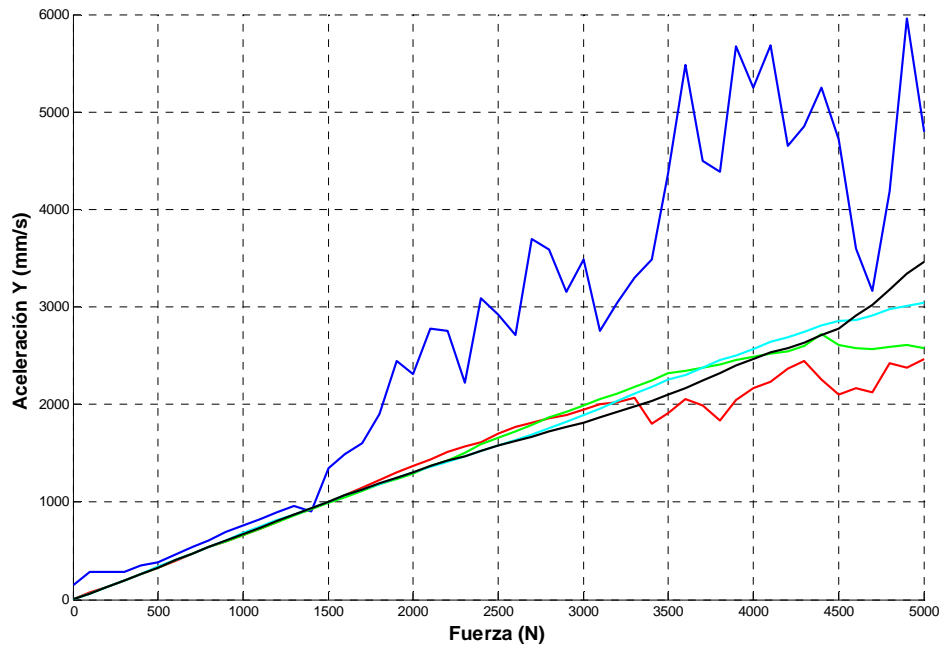


Figura 5.7. Evolución de aceleración del C.A.I, coordenada Y; Modelo actual.

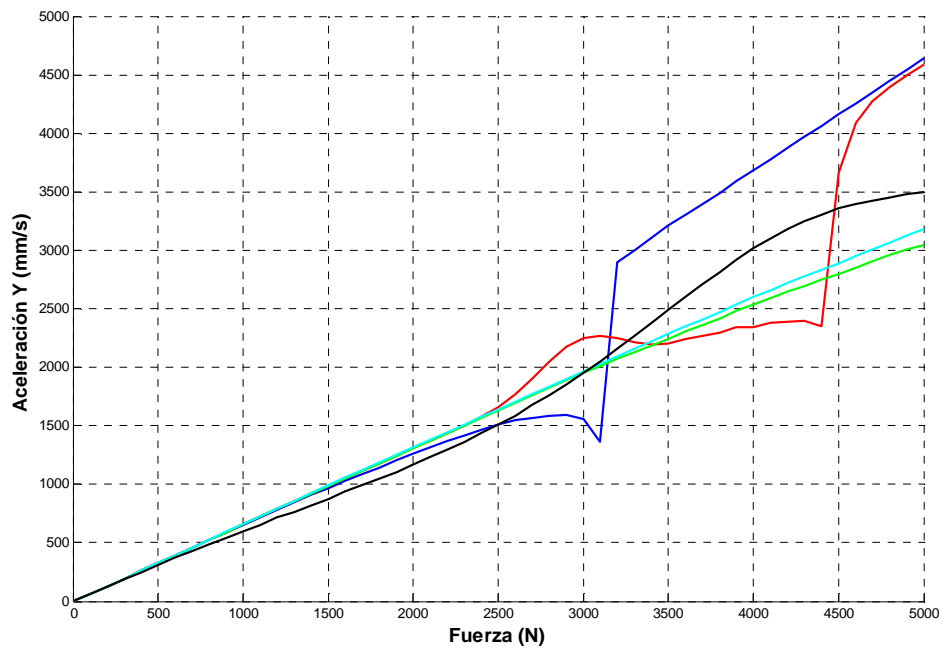


Figura 5.8. Evolución de aceleración del C.A.I, coordenadaY; Modelo original.

5.2.1.3 Variación de la fuerza de desequilibrio del rotor

En las simulaciones para el parámetro de la fuerza de desequilibrio como constante variable, encontramos una situación parecida en ambos modelos, pero sólo en apariencia. Las tendencias seguidas por los resultados son básicamente lineales, aunque con gran inestabilidad en el modelo actual para constantes de rigidez muy bajas, y una mayor irregularidad en las formas del mismo. Los valores alcanzados por el modelo actual también son inferiores a los del modelo original.

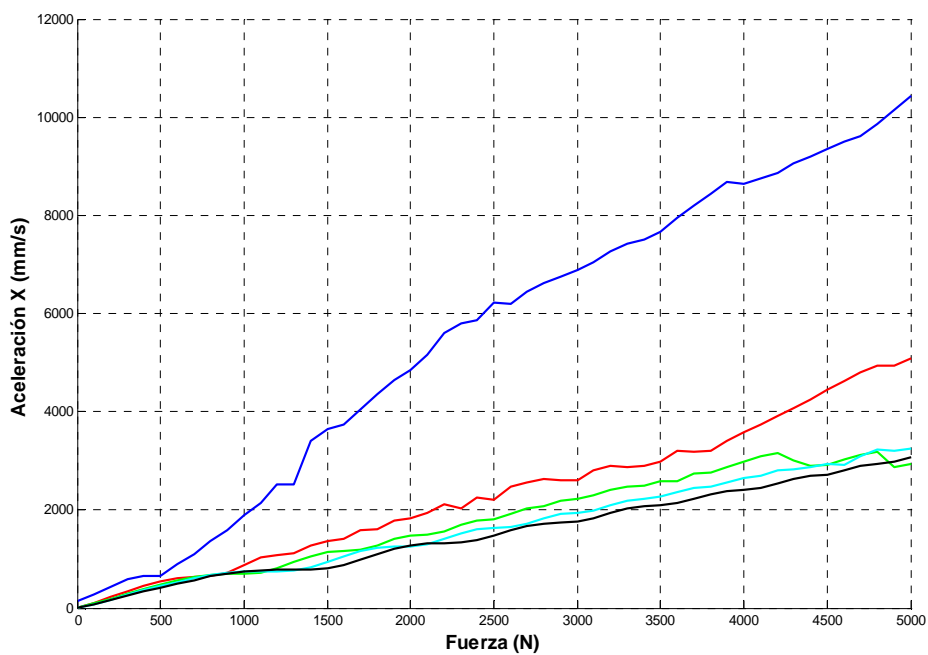


Figura 5.9. Evolución de aceleración del C.A.I, coordenada X; Modelo actual.

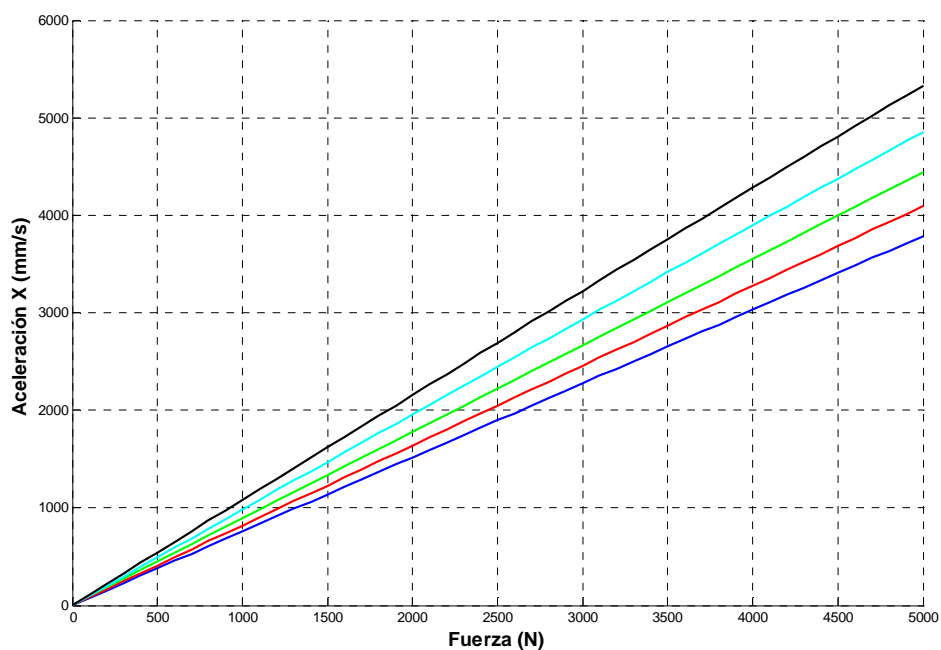


Figura 5.10. Evolución de aceleración del C.A.I, coordenada X; Modelo original.

5.2 GRÁFICAS DE RESULTADOS

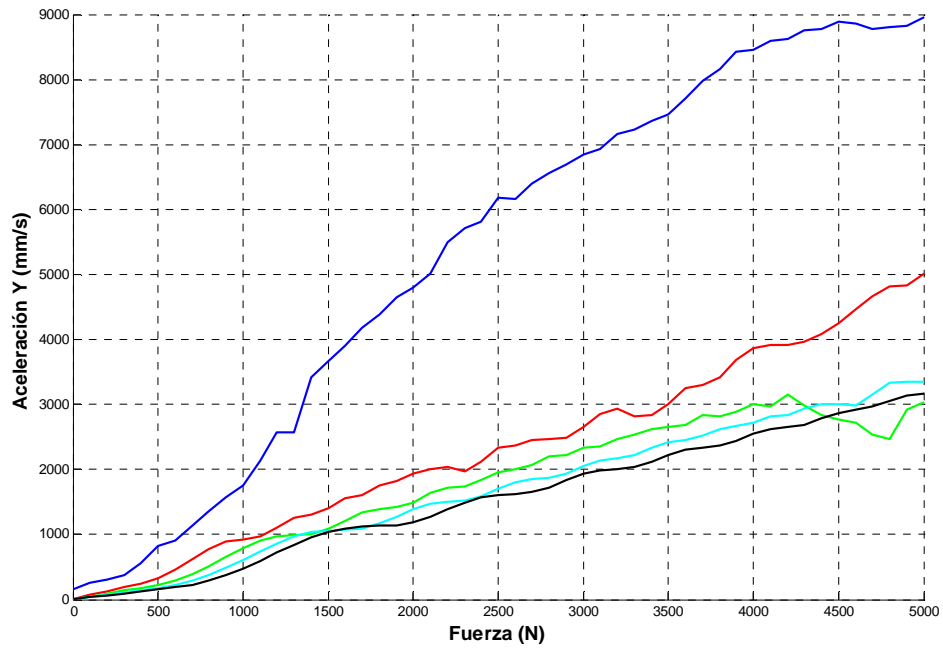


Figura 5.11. Evolución de aceleración del C.A.I, coordenada Y; Modelo actual.

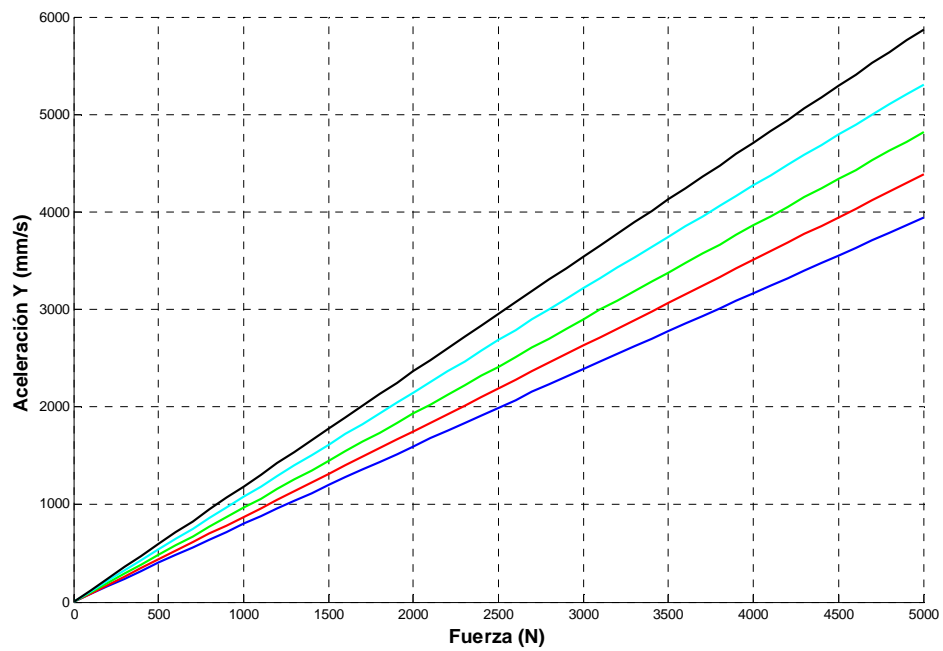


Figura 5.12. Evolución de aceleración del C.A.I, coordenada Y; Modelo original.

5.2.1.4 Variación de la velocidad de giro del rotor

Los dos modelos difieren en sus formas de gráfica, manteniéndose más o menos constantes los valores entre los que se mueven las gráficas del modelo actual. Para el modelo de Newton original, la coordenada x sufre una tendencia ascendente, mientras que la y se mantiene constante en el tiempo.

Sin embargo, el aspecto de alguna gráfica puede ser engañoso. Los valores entre los que oscilan las gráficas son muy pequeños, tanto en valor absoluto como en variaciones, tanto en modelos originales como actuales para las dos coordenadas. Comparados con la influencia de las fuerzas exteriores y de desequilibrio, no parece que afecten demasiado las variaciones del parámetro de entrada, lo que indica que no es una entrada que rija el comportamiento del movimiento del C.A.I., ya que los valores Para este parámetro, las constantes de rigidez muy bajas demuestran que siguen generando resultados mucho más inestables que las demás.

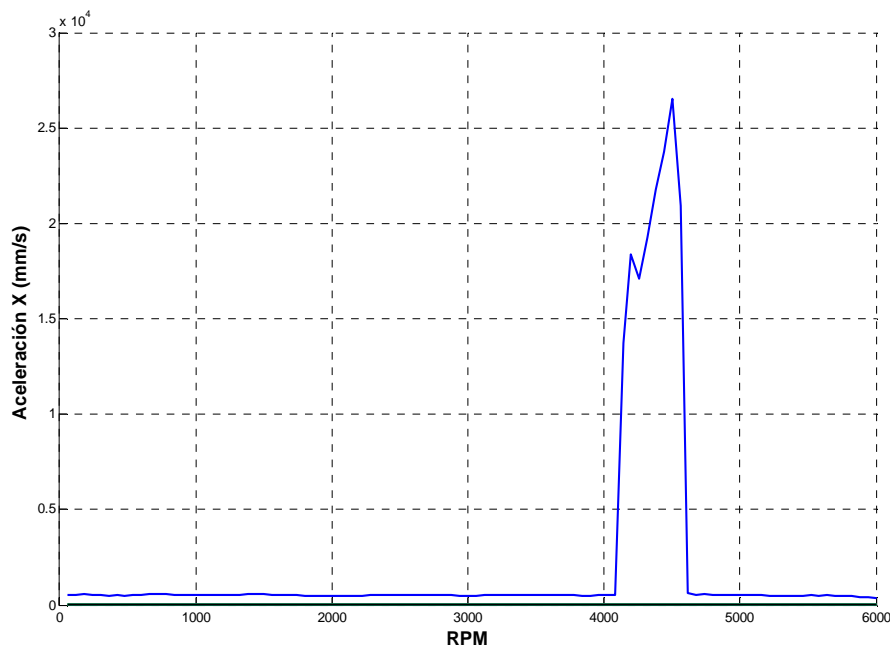


Figura 5.13. Vista general de la evolución de aceleración del C.A.I, coordenada X; Modelo actual.

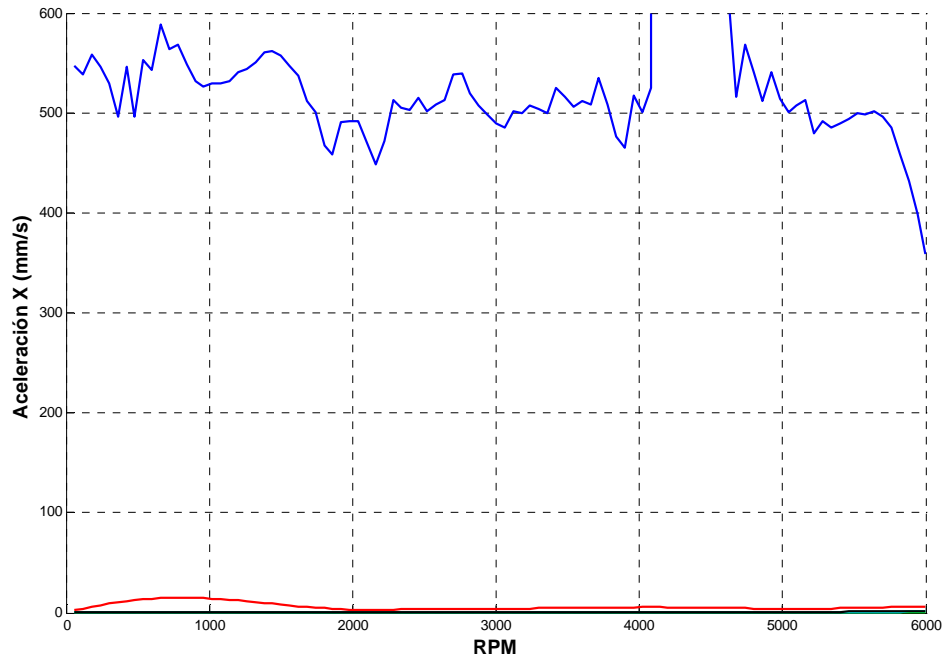


Figura 5.14. Vista detalle de la evolución de aceleración del C.A.I, coordenada X; Modelo actual.

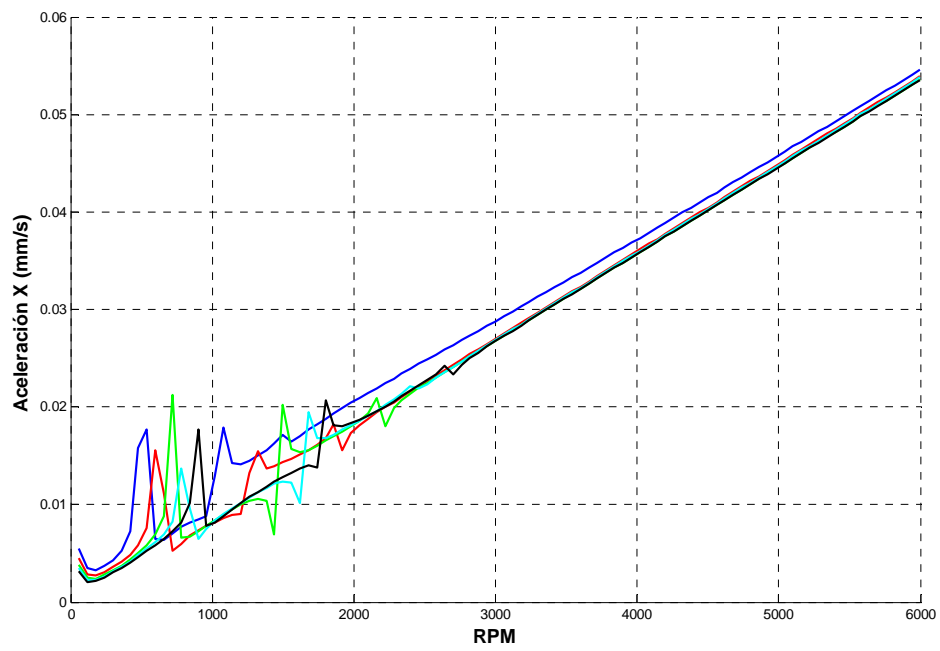


Figura 5.15. Evolución de aceleración del C.A.I, coordenada X; Modelo original.

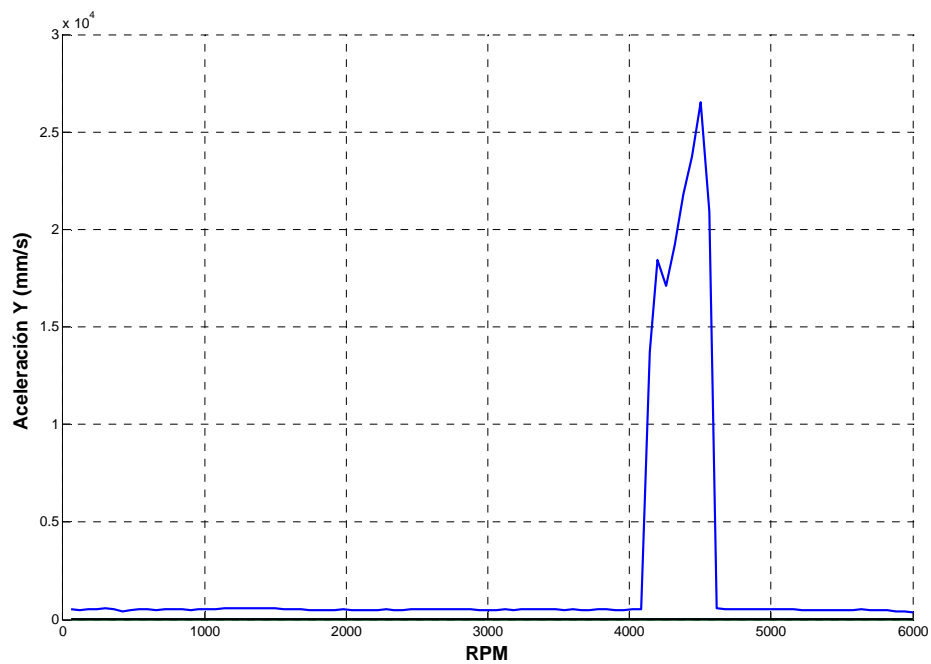


Figura 5.16. Vista general de la evolución de aceleración del C.A.I, coordenada Y; Modelo actual.

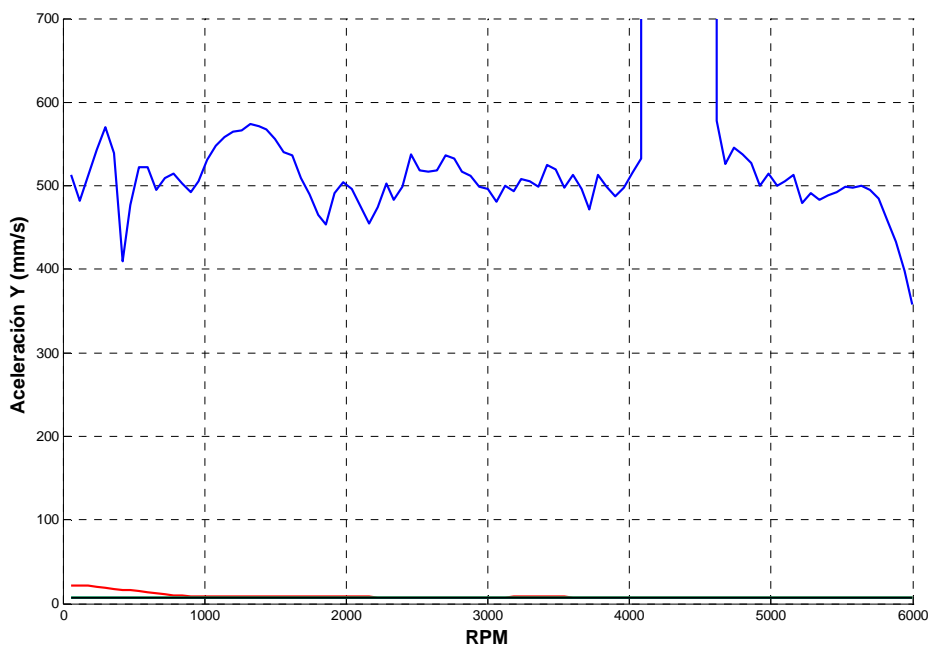


Figura 5.17. Vista detalle de la evolución de aceleración del C.A.I, coordenada Y; Modelo original.

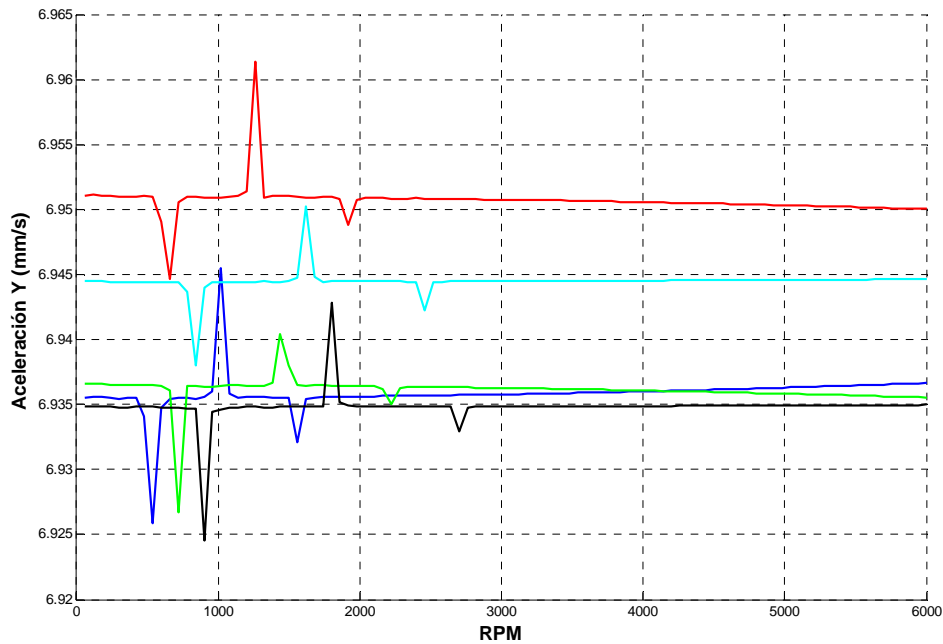


Figura 5.18. Evolución de aceleración del C.A.I, coordenada Y; Modelo original.

5.2.1.5 Variación de la masa del rotor

El modelo original no presenta unas gráficas que puedan ser utilizadas para compararlas con los resultados obtenidos con el actual, con resultados muy irregulares. Los resultados que éste arroja son una disminución cuasi-lineal de los valores de la aceleración, con valores mayores en la componente y . Al igual que el parámetro de entrada de velocidad de rotación del rotor, apenas parece afectar al movimiento del C.A.I. y sigue siendo inestable a bajas constantes de rigidez para el modelo actual.

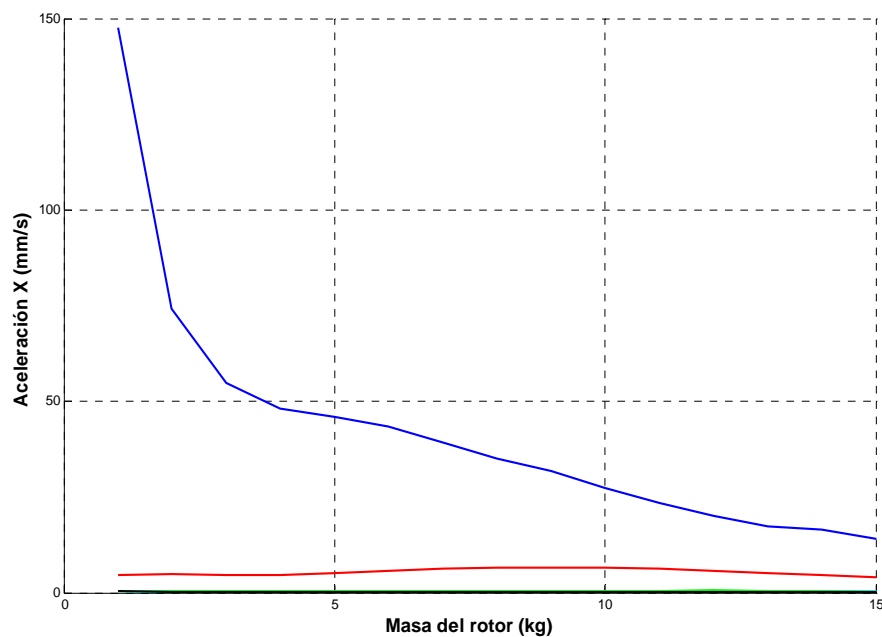


Figura 5.19. Evolución de aceleración del C.A.I, coordenada X; Modelo actual.

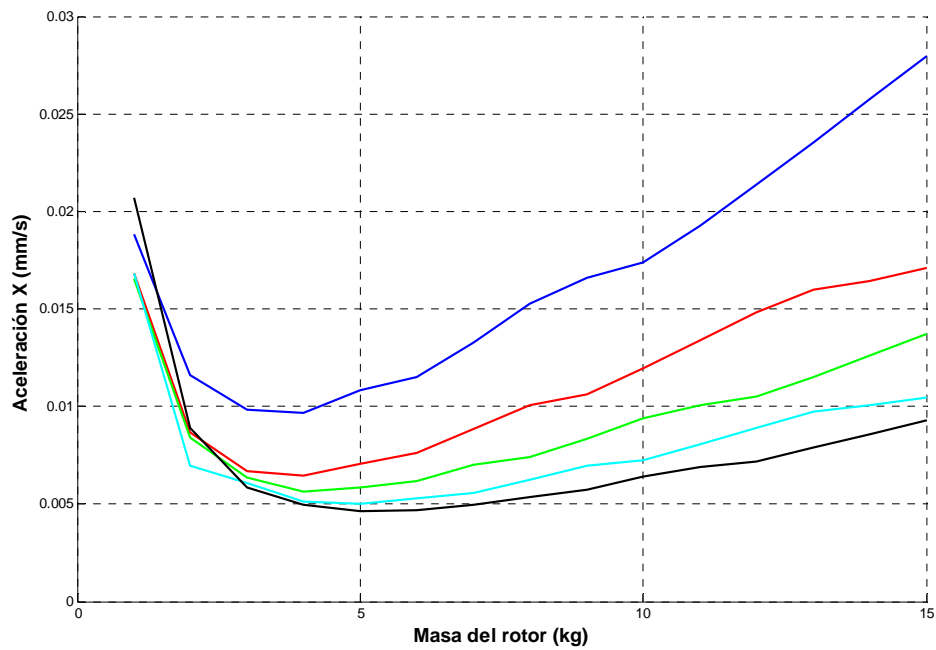


Figura 5.20. Evolución de aceleración del C.A.I, coordenada X; Modelo original.

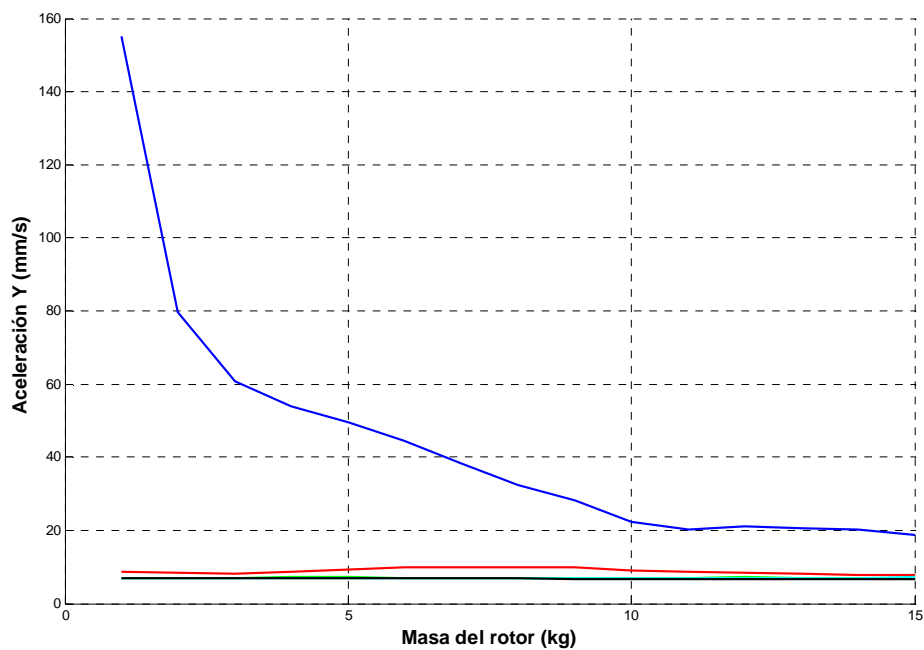


Figura 5.21. Evolución de aceleración del C.A.I, coordenada Y; Modelo actual.

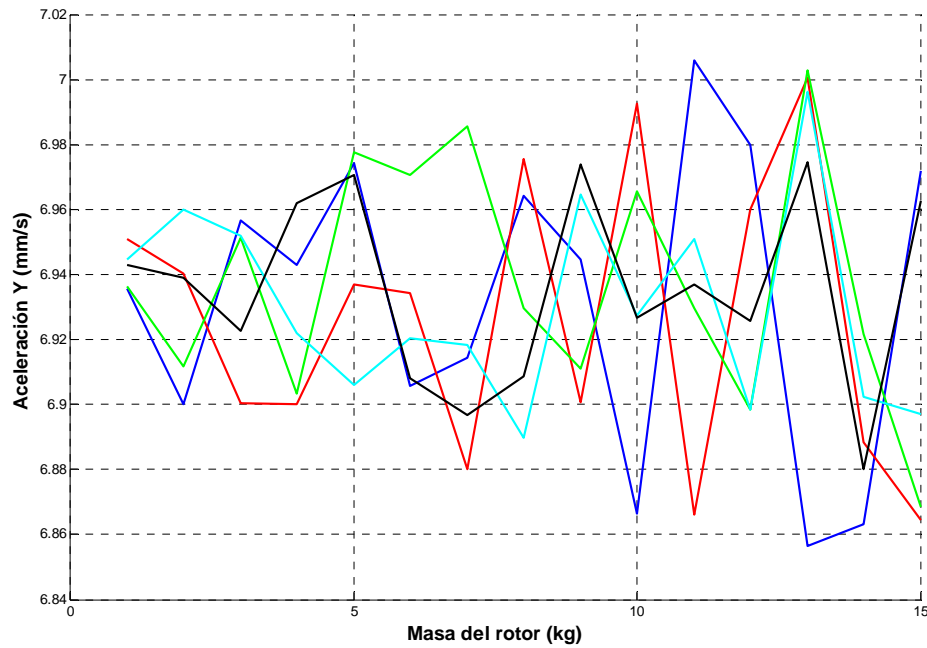


Figura 5.22. Evolución de aceleración del C.A.I, coordenada Y; Modelo original.

5.2.2 Deformaciones

5.2.2.1 Variación de Fex

Las deformaciones de los elementos rodantes eran un punto a tener en cuenta con respecto a la tesis de partida. Como puede verse en las gráficas, las correspondientes al modelo original muestran, para las constantes de rigidez que presentan una forma estable, una tendencia casi constante, pese al aumento de valores de entrada. En el apartado 5.2.5 se verá el por qué de esta tendencia y se comentará la solución adoptada para obtener los resultados que se muestran para el modelo actual, donde, salvo para la constante de rigidez más baja, la tendencia que siguen las gráficas es prácticamente lineal, más acorde con la realidad. Sólo se muestran los resultados para las deformaciones cuando actúan las fuerzas en dirección X, ya que para la fuerza exterior en dirección Y, los resultados son prácticamente iguales.

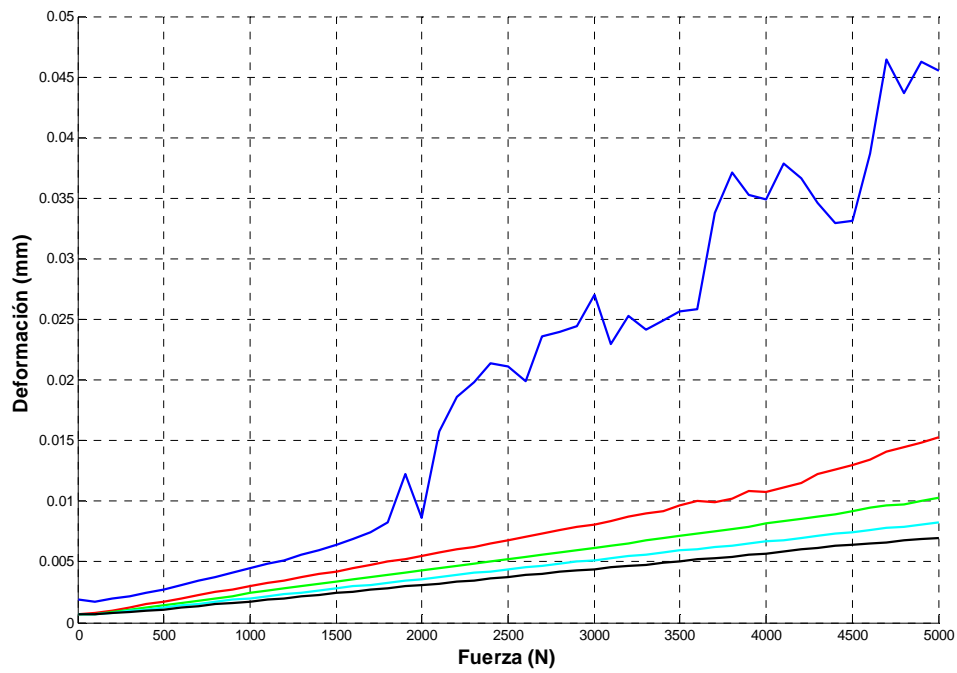


Figura 5.23. Evolución de deformaciones en el contacto elemento- pista interior; Modelo actual.

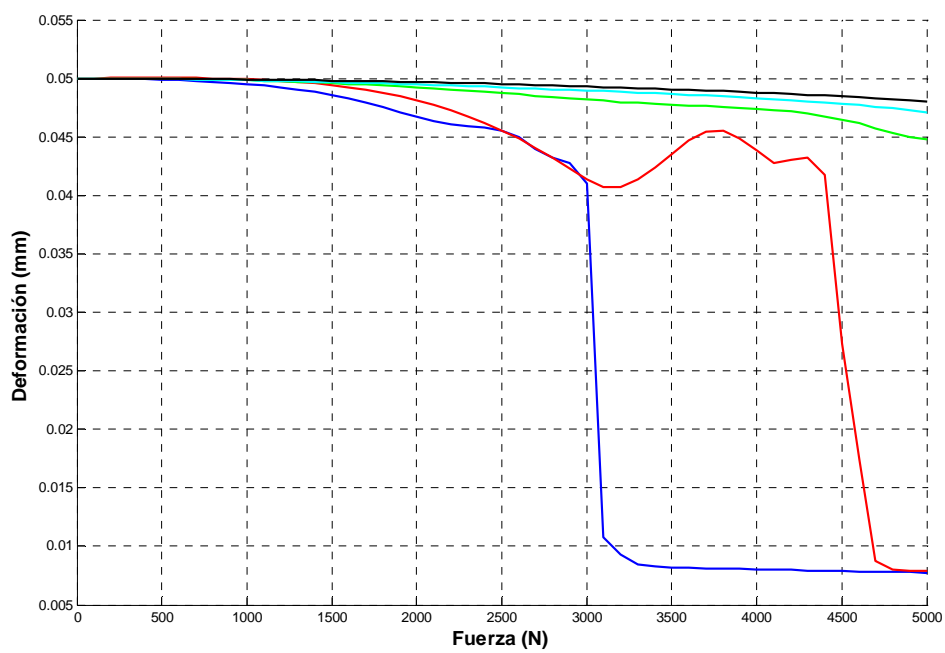


Figura 5.24. Evolución de deformaciones en el contacto elemento- pista interior; Modelo original.

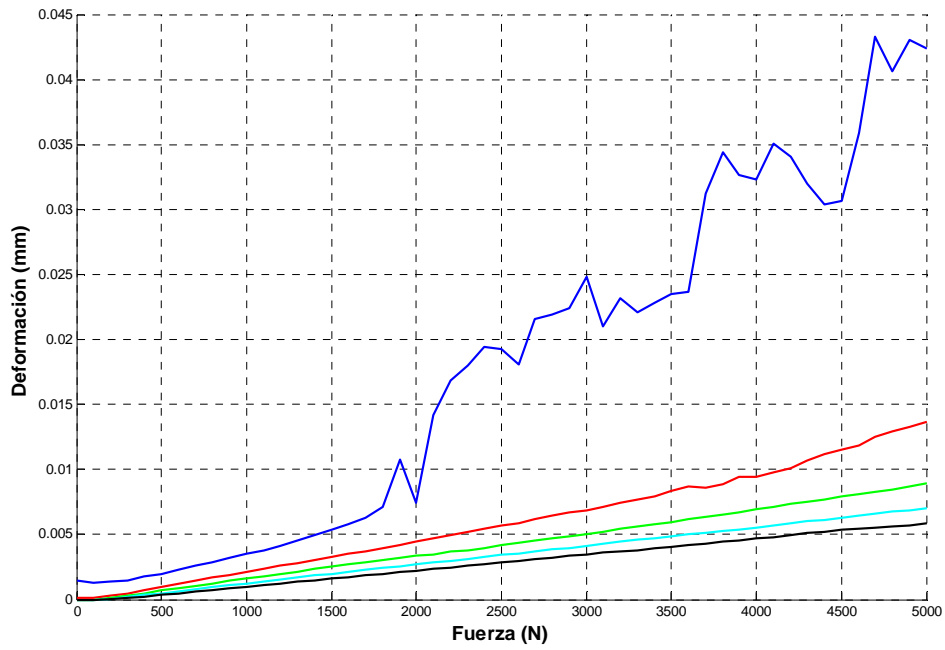


Figura 5.25. Evolución de deformaciones en el contacto elemento- pista exterior; Modelo actual.

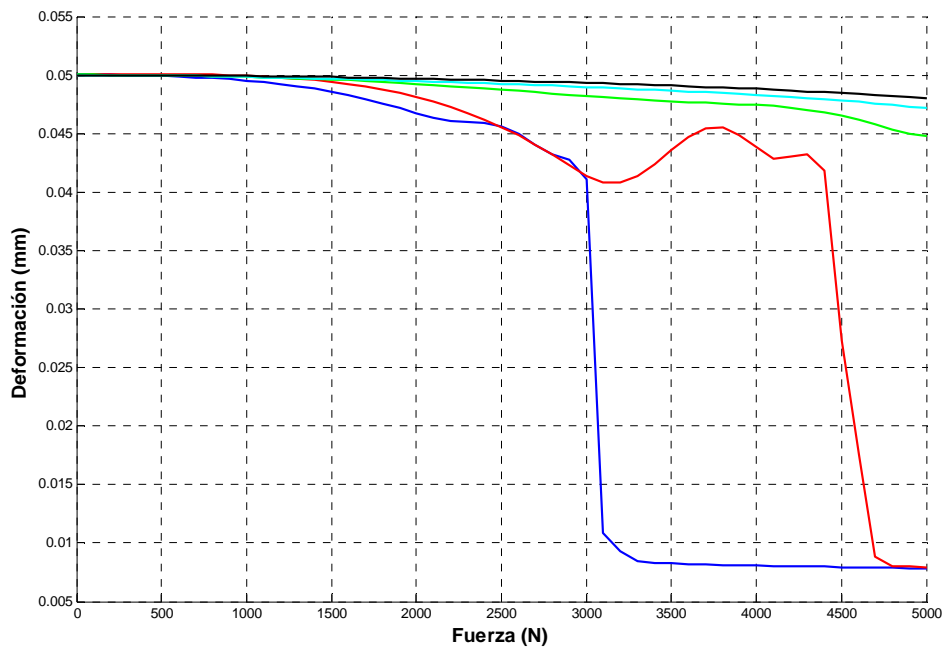


Figura 5.26. Evolución de deformaciones en el contacto elemento- pista exterior; Modelo original.

5.2.2.2 Variación de la fuerza de desequilibrio del rotor

Las fuerzas de desequilibrio del rotor generan una gráfica con la misma tendencia lineal para el modelo actual. Para el modelo original, a primera vista la variación con el incremento de fuerzas es significativa, pero si se observa la escala, puede verse que la variación es ínfima cuando aumenta dicho parámetro. Además, pese a que pueden considerarse valores casi constantes, lo cierto es que se aprecia una clara disminución de los mismos cuando aumenta la fuerza externa, lo cual no es real.

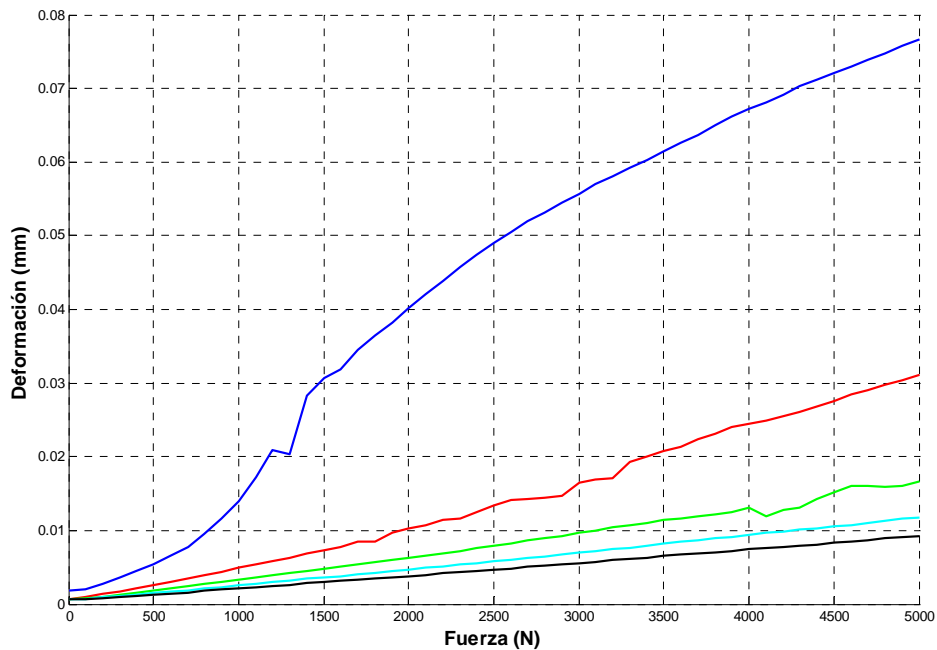


Figura 5.27. Evolución de deformaciones en el contacto elemento- pista interior; Modelo actual.

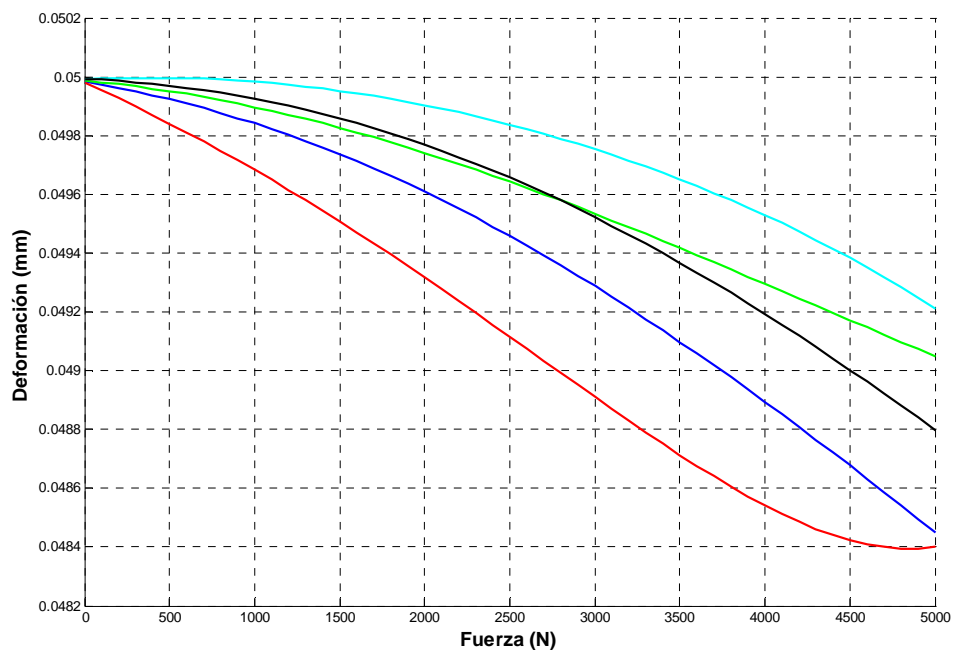


Figura 5.28. Evolución de deformaciones en el contacto elemento- pista interior; Modelo original.

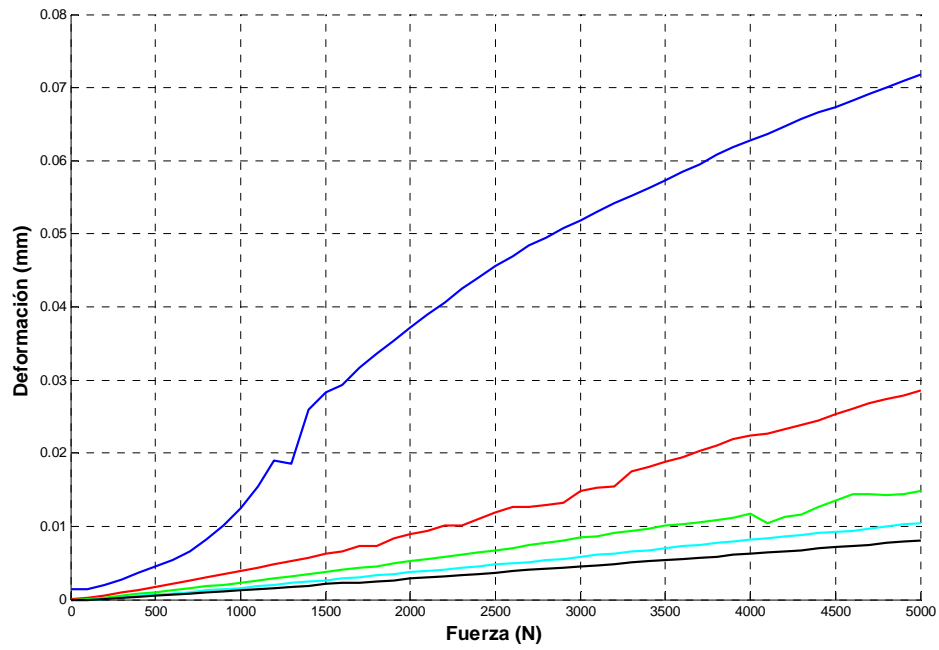


Figura 5.29. Evolución de deformaciones en el contacto elemento- pista exterior; Modelo actual.

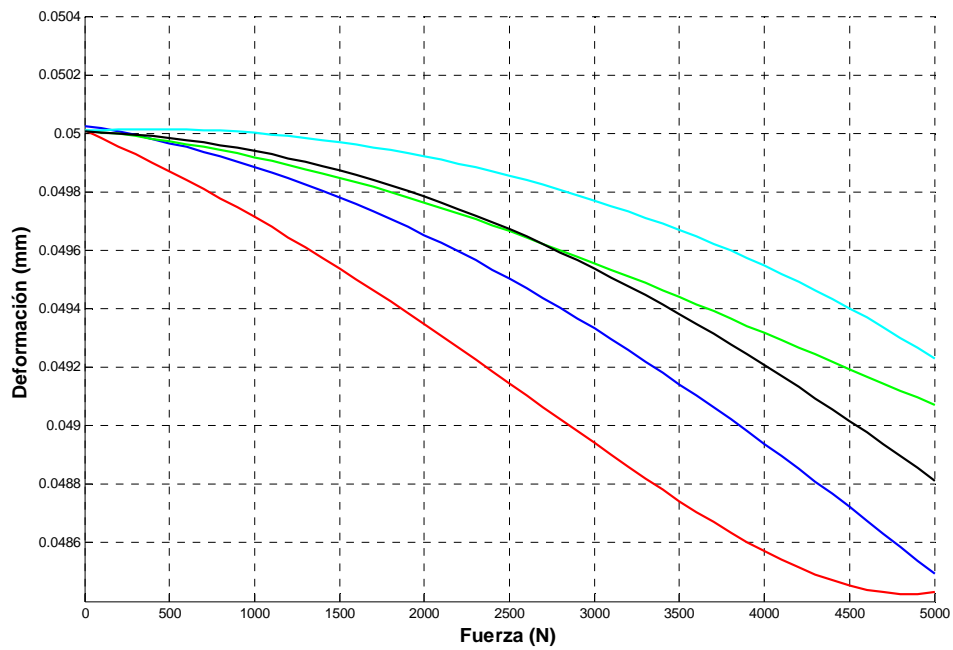


Figura 5.30. Evolución de deformaciones en el contacto elemento- pista exterior; Modelo original.

5.2.2.3 Variación de la velocidad de rotación del rotor

Para las variables de entrada velocidad de rotación del rotor y masa del rotor, no se producen variaciones importantes del valor con el incremento de los parámetros de entrada (si despreciamos el caso de constante de rigidez muy baja en el modelo actual). Además, para el caso de la masa del rotor los resultados vuelven a ser difícilmente comparables, ya que el modelo original no presenta una tendencia clara, aunque los valores entre los que oscila son despreciables. Puede concluirse diciendo que, al igual que para el movimiento del rotor, los parámetros clave son las fuerzas exteriores y las de desequilibrio del rotor.

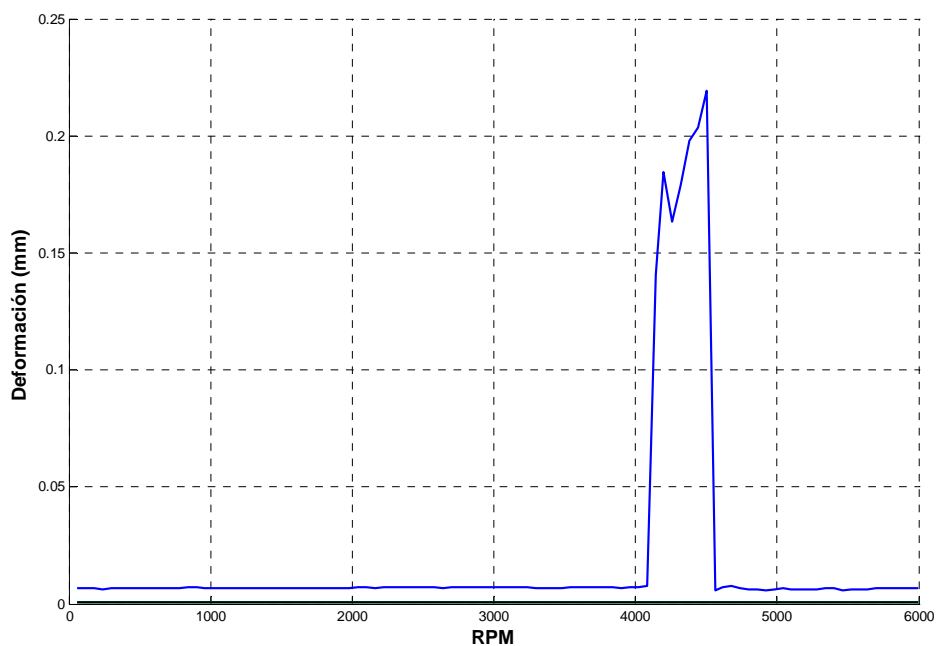


Figura 5.31. Vista general de la evolución de deformaciones en el contacto elemento- pista interior; Modelo actual.

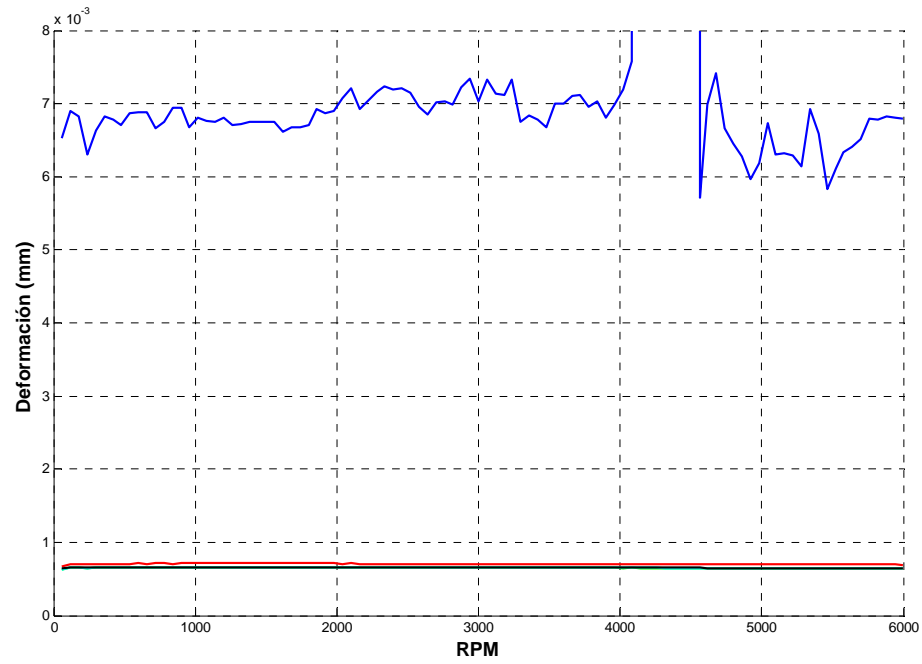


Figura 5.32. Vista detalle de la evolución de deformaciones en el contacto elemento- pista interior; Modelo actual.

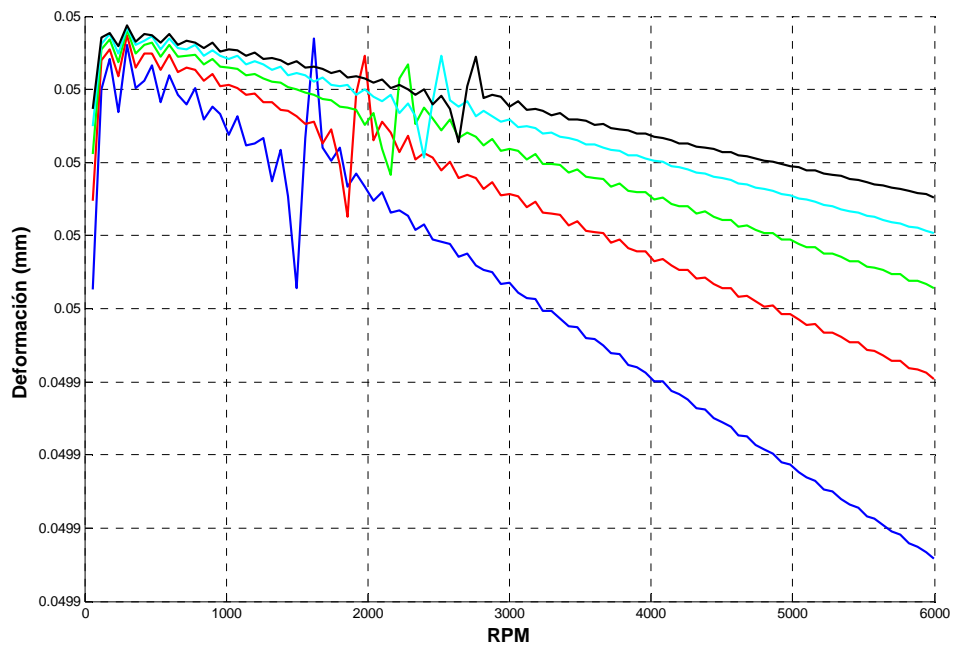


Figura 5.33. Evolución de deformaciones en el contacto elemento- pista interior; Modelo original.

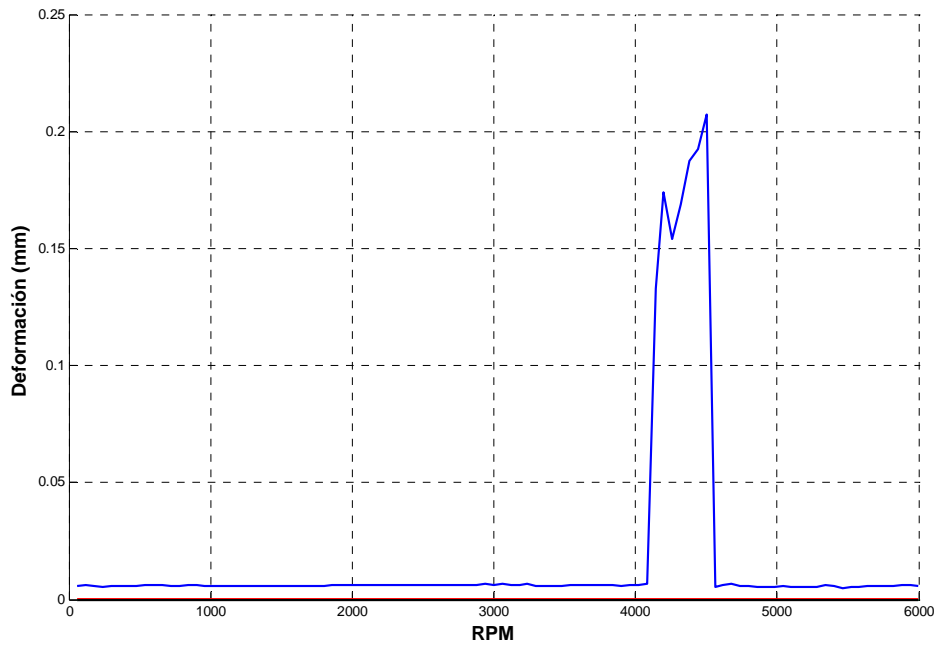


Figura 5.34. Vista general de la evolución de deformaciones en el contacto elemento- pista exterior; Modelo actual.

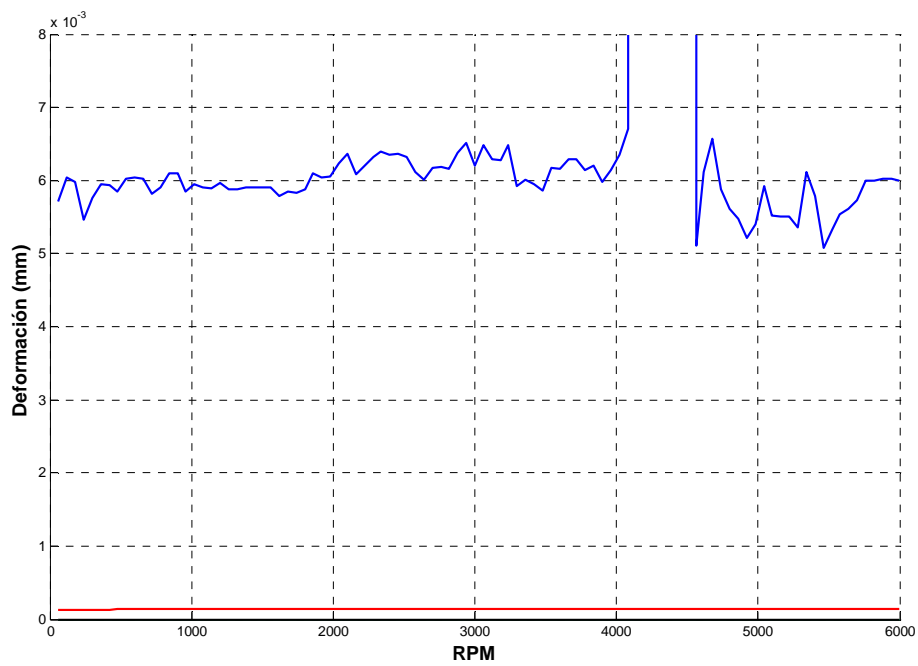


Figura 5.35. Vista detalle de la evolución de deformaciones en el contacto elemento- pista exterior; Modelo actual.

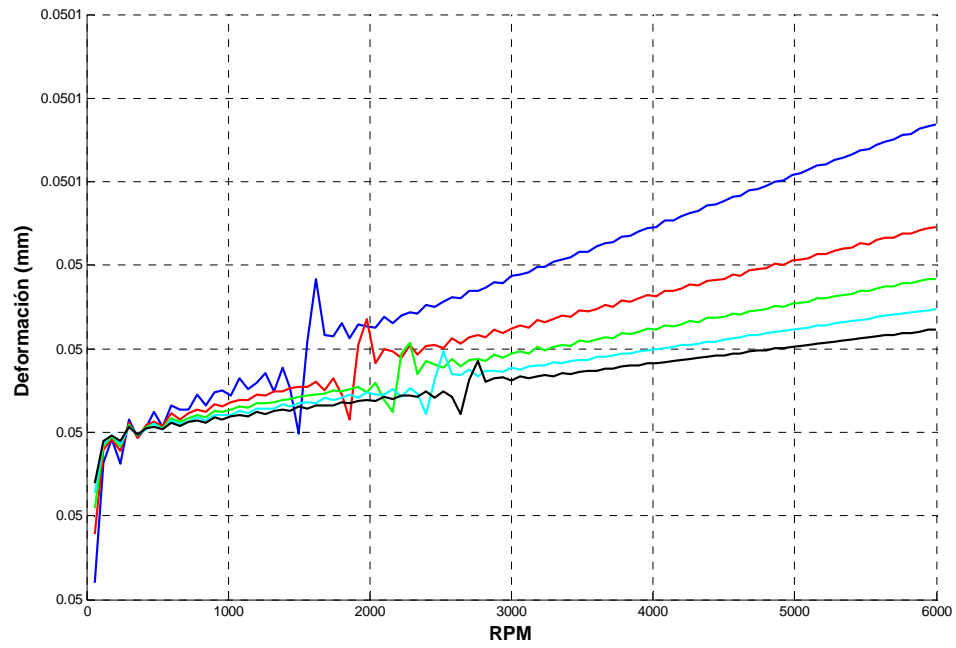


Figura 5.36. Evolución de deformaciones en el contacto elemento- pista exterior; Modelo original.

5.2.2.4 Variación de la masa del rotor

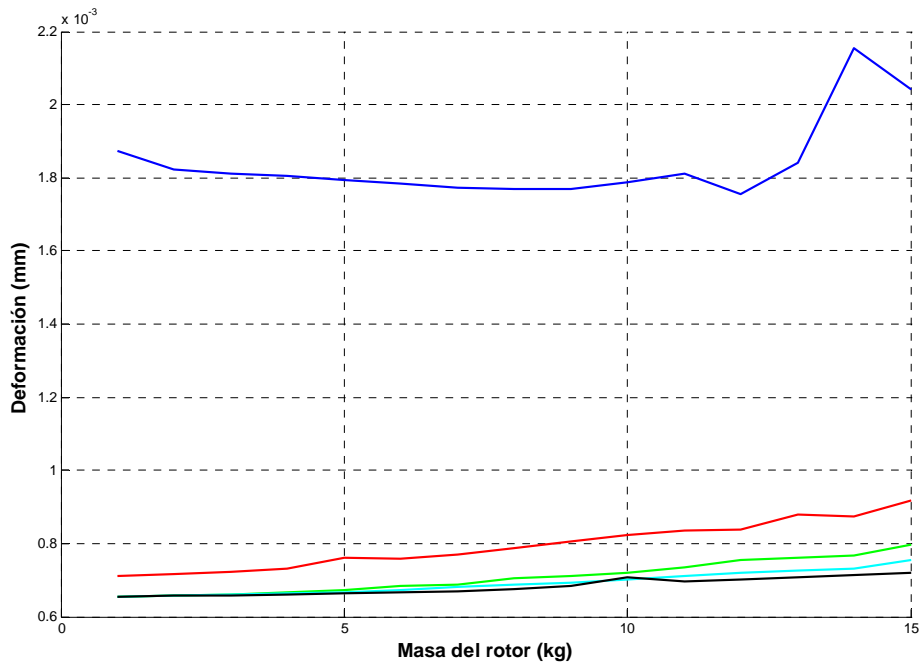


Figura 5.37. Evolución de deformaciones en el contacto elemento- pista interior; Modelo actual.

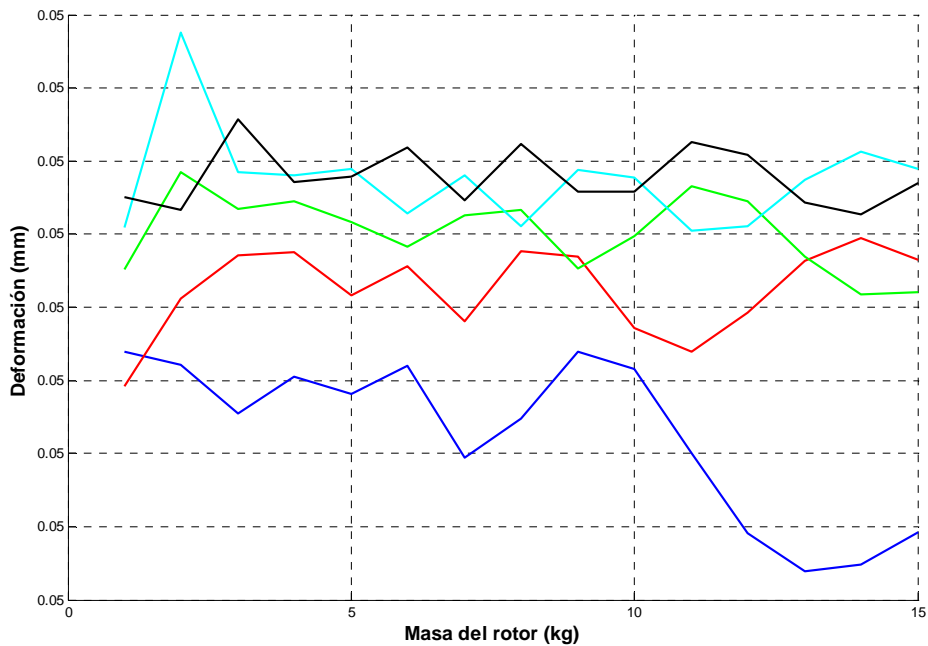


Figura 5.38. Evolución de deformaciones en el contacto elemento- pista interior; Modelo original.

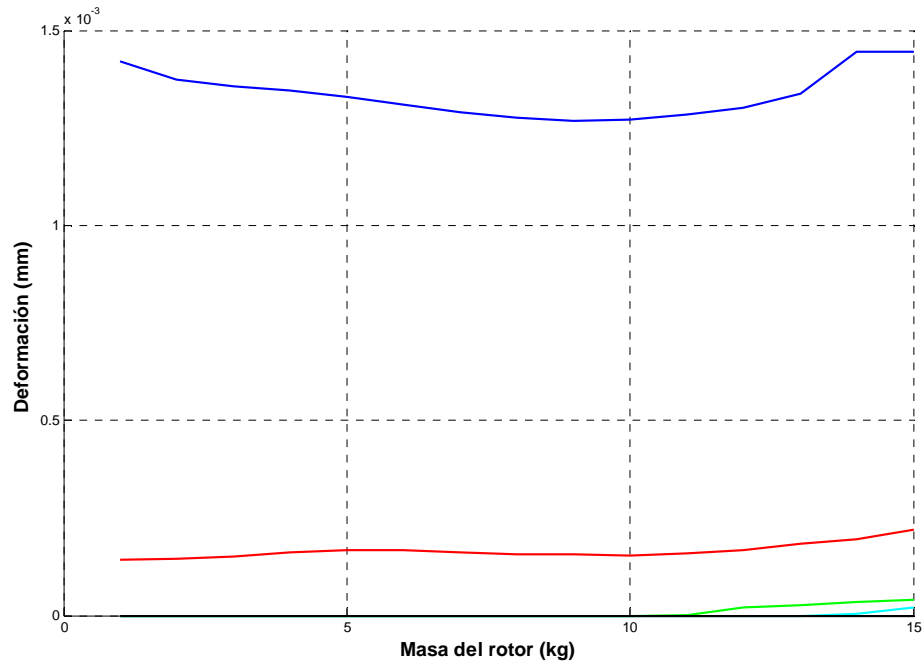


Figura 5.39. Evolución de deformaciones en el contacto elemento- pista exterior; Modelo actual.

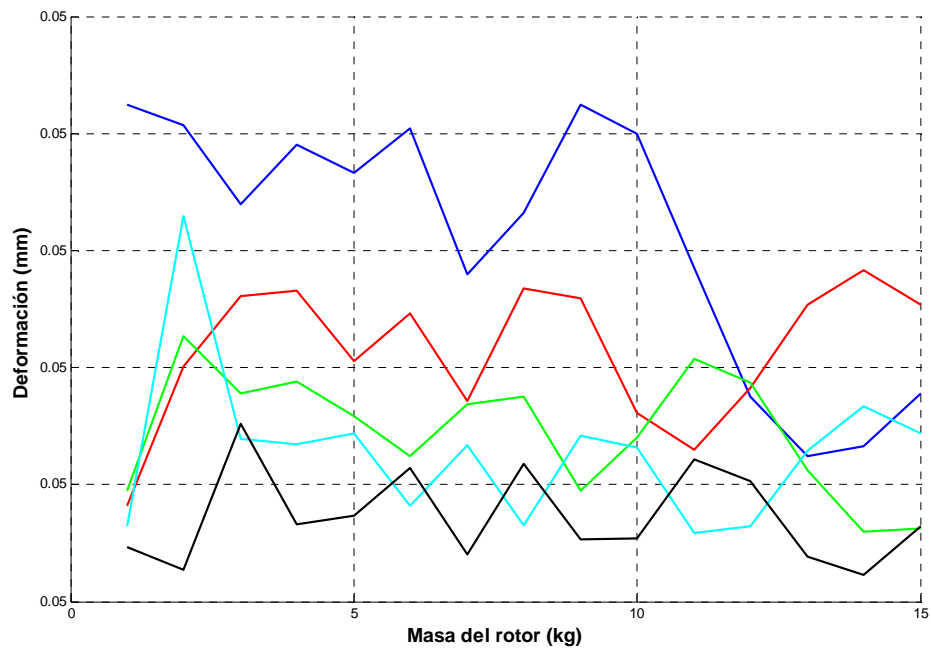


Figura 5.40. Evolución de deformaciones en el contacto elemento- pista exterior; Modelo original.

5.2.3. Fuerzas

5.2.3.1 Variación de Fex

Sólo se muestran las fuerzas obtenidas ante una fuerza exterior en dirección X, ya que las fuerzas en dirección Y son muy similares. En cuanto a los parámetros velocidad de rotación del rotor y masa del mismo, apenas generan fuerzas dignas de consideración, al ser una consecuencia de las deformaciones, no considerándose necesario mostrarlos, aunque se podrán encontrar en los anexos.

Las diferencias entre el modelo actual y el original son evidentes: para el modelo modificado, el único parámetro que hace variar las fuerzas es la constante de rigidez, mientras que una variación de las fuerzas externas, de desequilibrio, velocidad de rotación y masa del rotor no provoca cambios apreciables. Únicamente a altas fuerzas y bajos coeficientes de rigidez se logra una variación en el caso de las fuerzas externas, pero parece más que se produce por inestabilidad del modelo, más que por un comportamiento físico. Además, la magnitud de las fuerzas obtenidas termina de confirmar que el modelo no arroja resultados correctos.

Para el modelo actual se logran gráficas con una tendencia más lógica. Ante fuerzas externas, las fuerzas que se obtienen para cada bola no dependen en exclusiva de la constante de rigidez, sino que aumentan a medida que lo hacen las condiciones exteriores, de manera casi lineal. Puede verse que están muy relacionadas con las deformaciones: al fin y al cabo, estas fuerzas son las fuerzas de contacto elemento rodante-pista, y deben estar relacionadas entre sí. Esto es debido a que en la tesis original, la constante de amortiguamiento se aplicaba siempre, mientras que la ecuación que gobierna el comportamiento del elemento rodante (3.48) indica que sólo debe actuar si existe deformación, lo cual quedó implementado correctamente en la nueva versión.

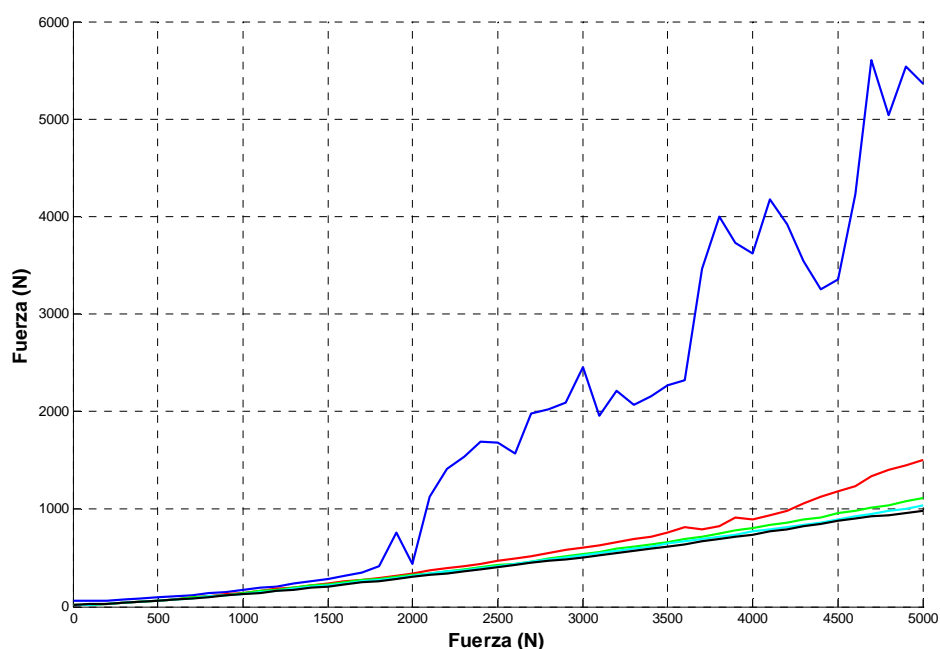


Figura 5.41. Evolución de fuerzas de contacto elemento- pista interior; Modelo actual.

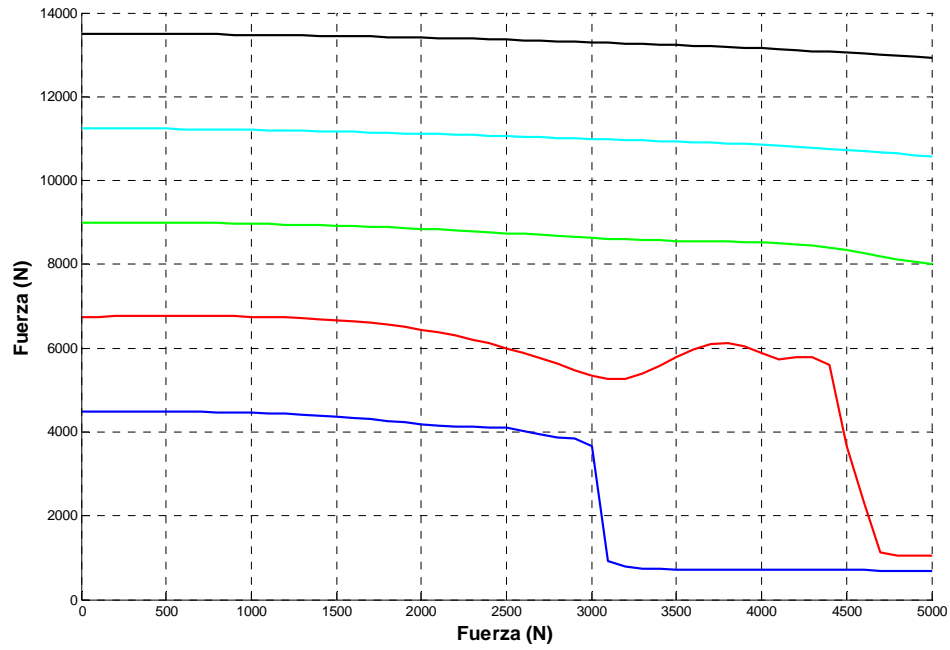


Figura 5.42. Evolución de fuerzas de contacto elemento- pista interior; Modelo original.

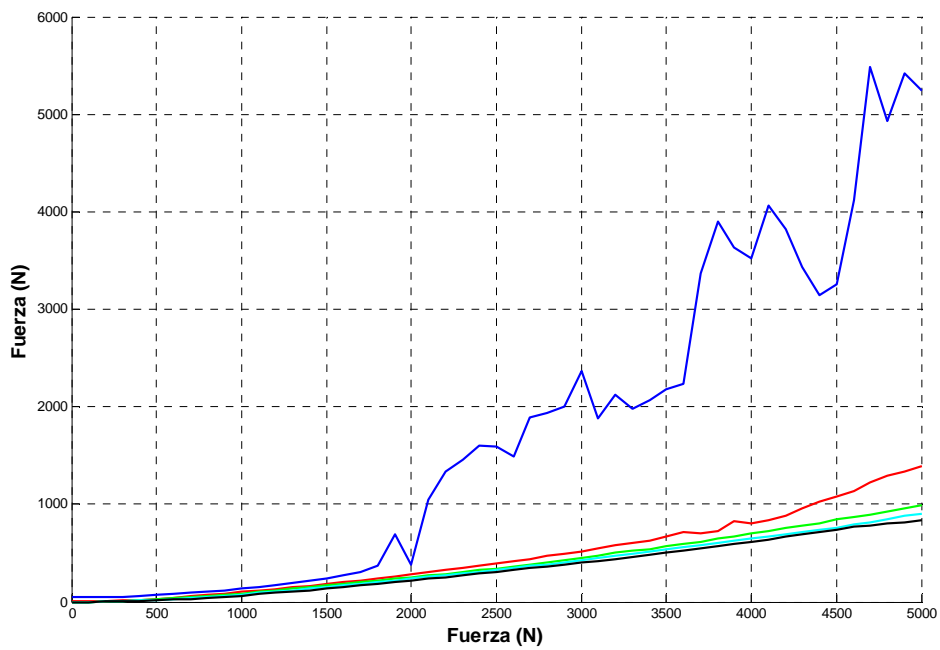


Figura 5.43. Evolución de fuerzas de contacto elemento- pista exterior; Modelo actual.

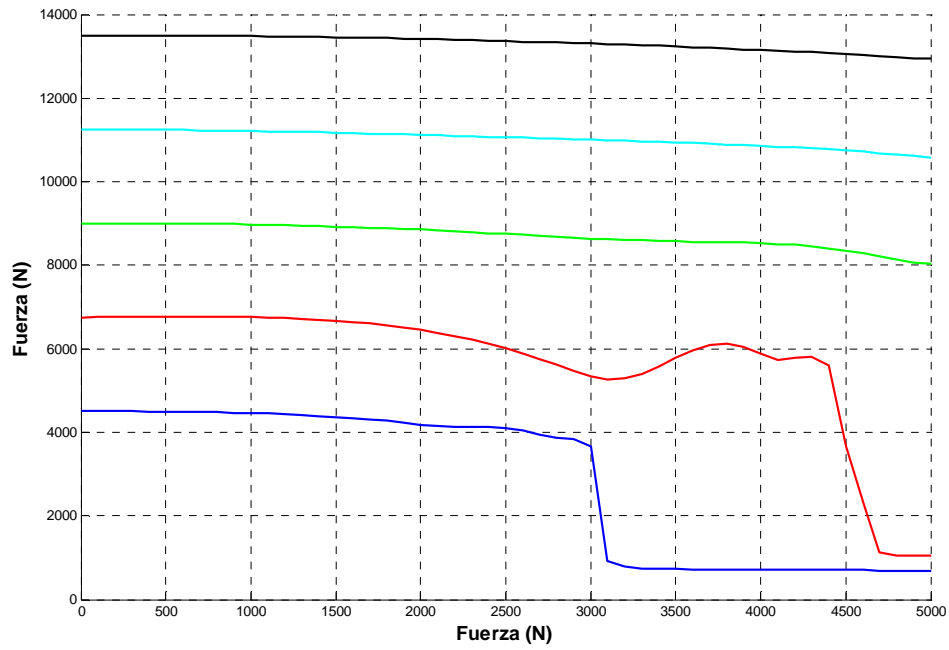


Figura 5.44. Evolución de fuerzas de contacto elemento- pista exterior; Modelo original.

5.2.3.2 Variación de la fuerza de desequilibrio del rotor

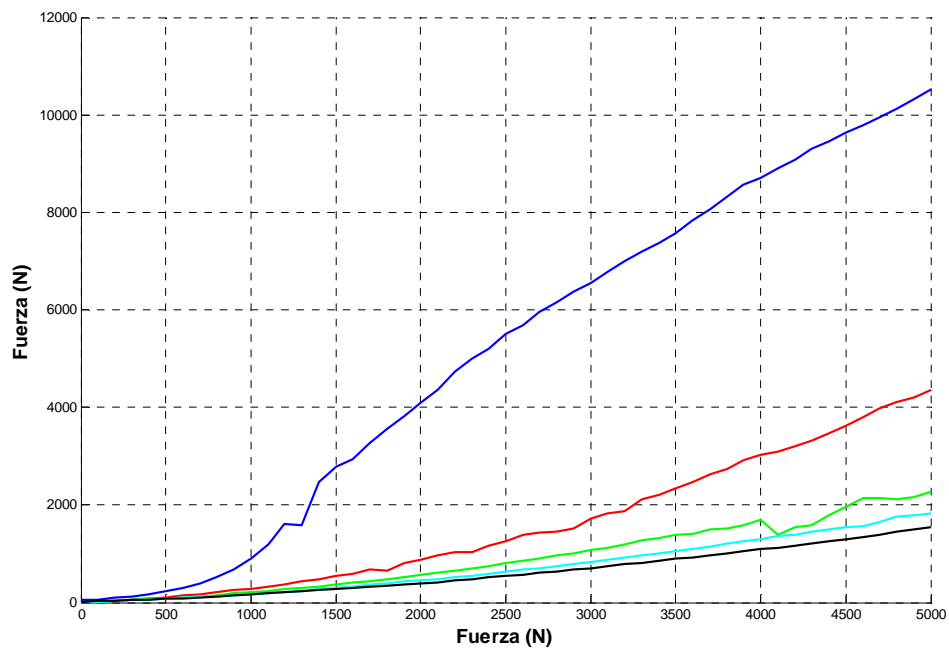


Figura 5.45. Evolución de fuerzas de contacto elemento- pista interior; Modelo actual.

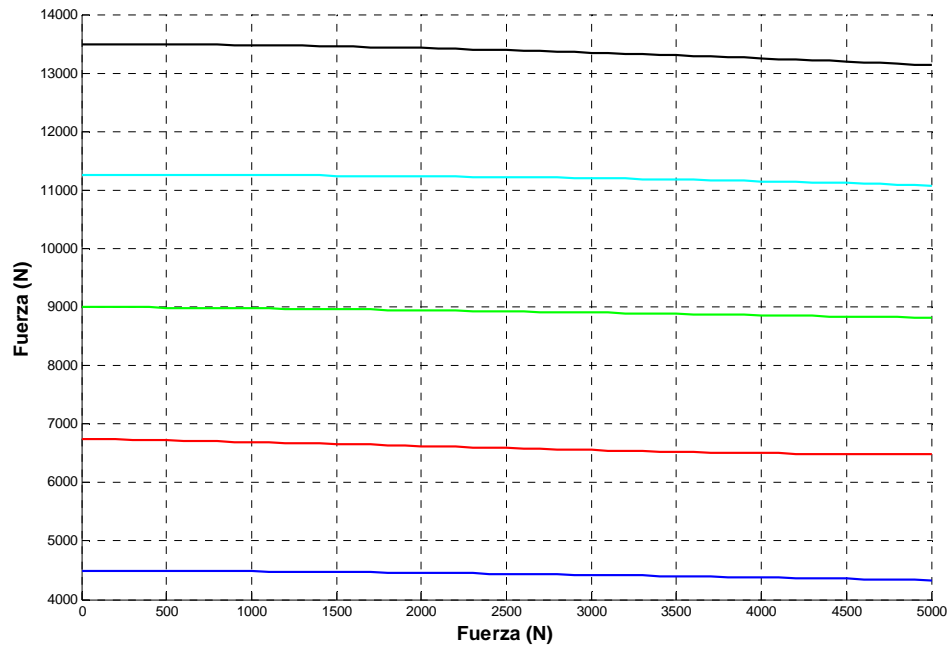


Figura 5.46. Evolución de fuerzas de contacto elemento- pista interior; Modelo original.

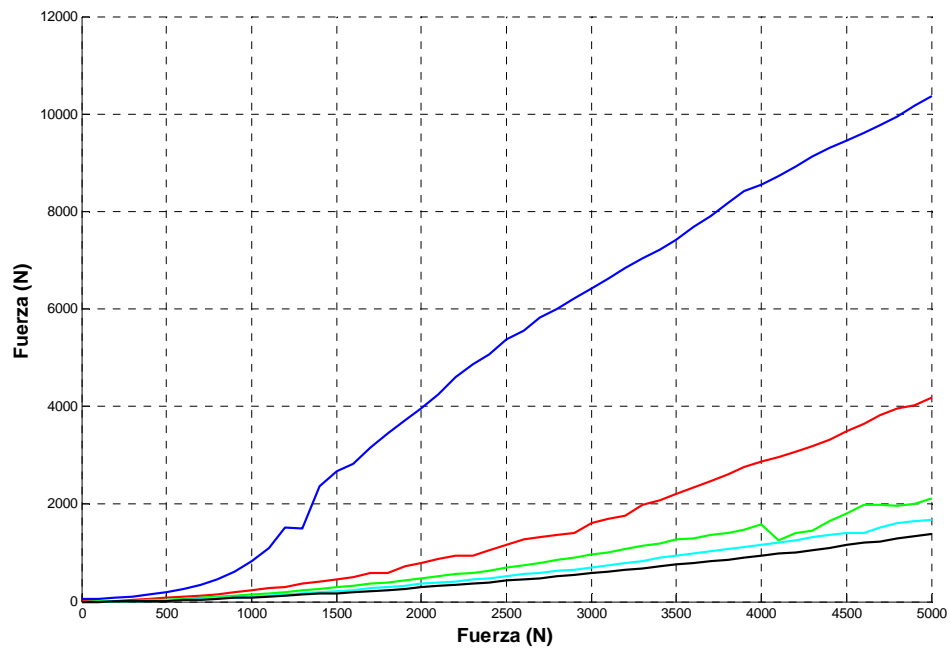


Figura 5.47. Evolución de fuerzas de contacto elemento- pista exterior; Modelo actual.

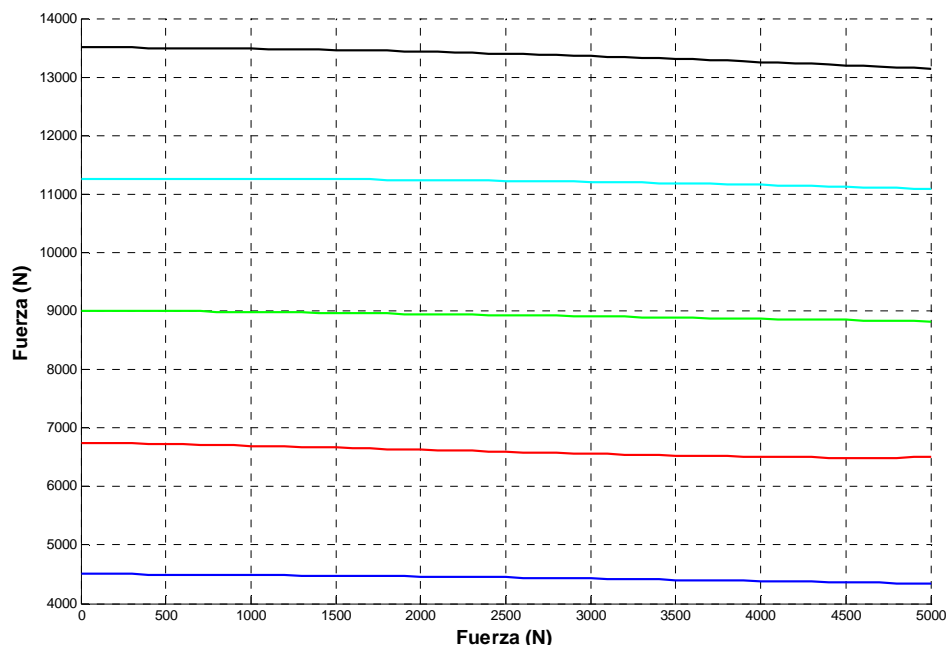


Figura 5.48. Evolución de fuerzas de contacto elemento- pista exterior; Modelo original.

5.2.4 Conclusiones

A la vista de los resultados obtenidos, pueden extraerse las siguientes conclusiones.

- Las constantes de rigidez bajas, en este caso las que se encuentran entre el 50 y el 75% del valor estándar, no presentan resultados estables o fiables cuando se aplican fuerzas externas altas. En especial, las constantes muy bajas (50% del valor original) presentan una tendencia de resultados creciente, pero muy difícil de cuantificar, por lo que esta constante será considerada como inestable, y se desecha para el análisis. A medida que se aumenta el valor de la constante de rigidez, se produce una disminución de las pendientes de las curvas que representan las tendencias seguidas por los valores de posición, velocidad y aceleración del centro del anillo interior al aumentar el parámetro de entrada, pero no de manera lineal, sino que dichas disminuciones son cada vez menores.
- Por norma general, el modelo nuevo arroja valores de onda menores y similares entre sí, en el caso de posiciones, velocidades y aceleraciones, más acordes con la realidad que los que obtenía el modelo original, reducciones que pueden ser de hasta un orden de magnitud. Especialmente se aprecia en los desplazamientos del centro del anillo interior: existen valores que pueden alcanzar el milímetro de desplazamiento. Si hablamos de que no existen holguras en el modelo actual, significaría que la deformación sufrida por el elemento rodante absorbería dicho milímetro, con lo que la fuerza generada por dicha deformación ascendería a unos 800.000 N, fuerza a todas luces desproporcionada.
- Los parámetros más influyentes en el modelo son las fuerzas exteriores y la de disequilibrio. La velocidad de rotación del rotor y la masa del rotor provoca variaciones, pero de una magnitud mucho menor, prácticamente despreciable

frente a las fuerzas. Puede afirmarse que el modelo soporta, para las constantes de rigidez adecuadas (iguales o mayores al valor estándar) un rango de valores de los parámetros de entrada aceptable para este tipo de rodamiento, al no mostrar signos de inestabilidad.

- Se ha subsanado con el nuevo modelo uno de los grandes problemas de la tesis original. En ella, siempre existía una deformación sobre los elementos rodantes, lo que originaba siempre una fuerza sobre el mismo. Las modificaciones efectuadas han conseguido que la deformación se produzca sólo en los instantes en los que el elemento sufre la presión del anillo interno, mientras que será 0 cuando esté libre.
- En lo referente a la comparación entre los modelos de Newton y Lagrange, la simplificación realizada en el modelo de Newton no provoca grandes distorsiones en los resultados, siendo los de ambos modelos bastante similares. Esta conclusión se alcanza observando las gráficas del anexo 4.4, ya que hubiese sido excesivo presentar los resultados necesarios. Puede afirmarse por tanto que la simplificación del ángulo β en el modelo de Newton es una aproximación válida.

5.2.5 Análisis pormenorizado de deformaciones y fuerzas

El análisis de las deformaciones de los elementos rodantes y las fuerzas de contacto merece, como antes se comentó, un apartado adicional, puesto que es necesario comprobar si los valores que se obtienen se corresponden con los teóricos. Además, aquí se observarán los resultados concretos que se obtienen en los modelos originales para los dos parámetros y se explicará el efecto de la modificación que se realizó en los bloques Elemento para corregirlo. Los parámetros que se utilizaron para la simulación son los siguientes, pero en el caso del modelo original son irrelevantes. El por qué obedece a que, tras las numerosas simulaciones efectuadas, se comprobó que, invariablemente, la deformación estaba marcada por el valor de la holgura, concretamente por la mitad de su valor.

Los parámetros de la simulación son:

- Constante de rigidez interior: $805140 \text{ N/mm}^{3/2}$.
- Constante de rigidez exterior: $872780 \text{ N/mm}^{3/2}$.
- Constante de amortiguamiento: $0.0152 \text{ N/mm}\cdot\text{s}$.
- Masa del rotor: 1kg
- Fuerza exterior en dirección X: 0 N.
- Fuerza exterior en dirección Y: 1000 N
- Fuerza de desequilibrio: 0 N
- Velocidad de rotación: 1800 rpm.
- Se utilizan los parámetros geométricos estándar para el rodamiento SKF.

En la Figura 5.49 se muestran los resultados del parámetro deformación que se obtiene para la simulación en el modelo de 5 G.D.L. de Newton original. Sólo se muestra la deformación interior, ya que la exterior es del mismo orden y tiene un comportamiento similar.

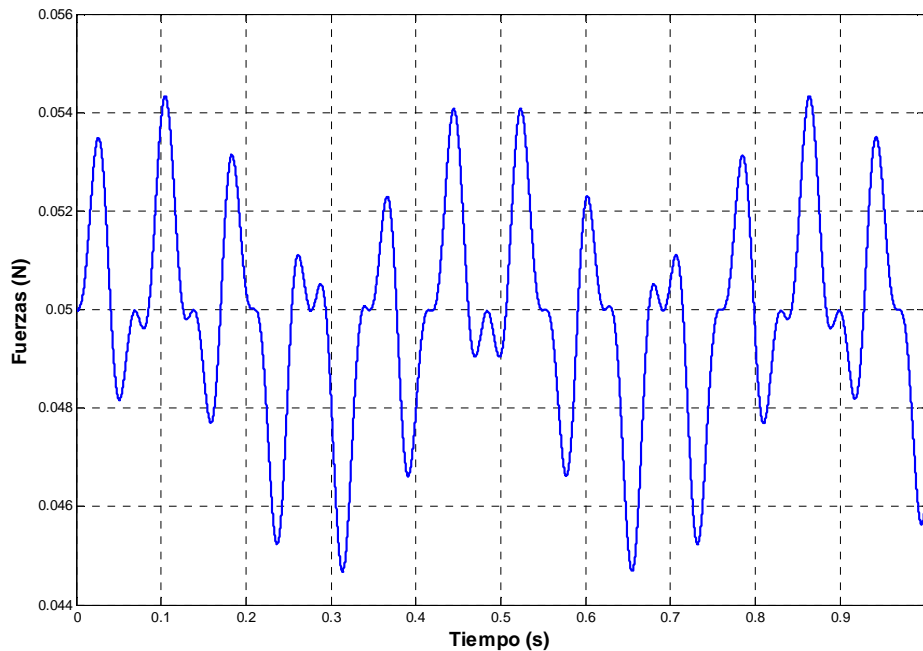


Figura 5.49. Deformaciones en el contacto elemento- pista interior en el modelo original.

En ella puede observarse cómo las deformaciones oscilan en torno a un valor correspondiente a la mitad de la holgura (0.1 mm). Esto indica que siempre existe una deformación, lo cual es imposible, dado que el centro del anillo interno se mueve, y considerando que las bolas siempre guardan la misma distancia angular entre ellas, cuando uno o dos elementos estén cargados, los restantes deben estar descargados, sin deformación alguna.

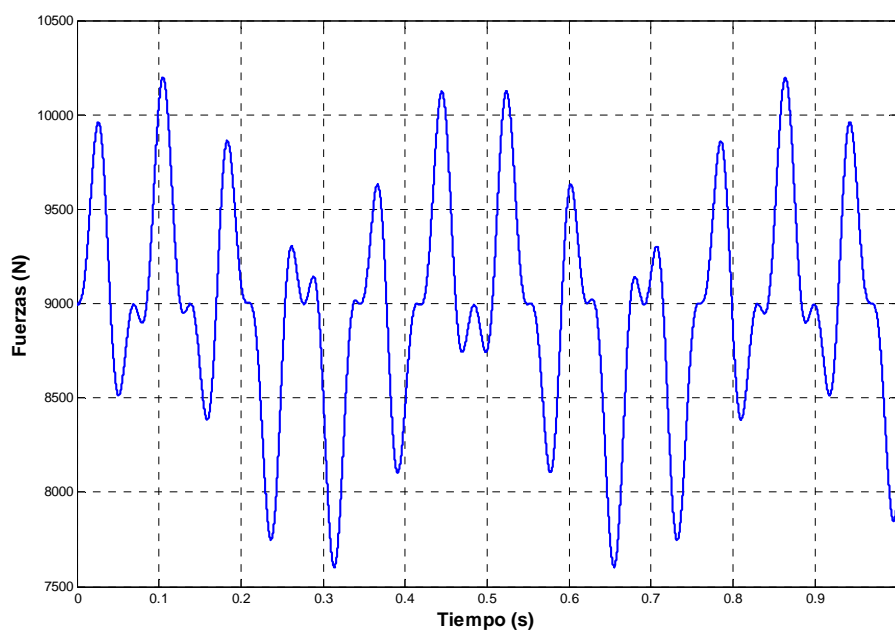


Figura 5.50. Fuerzas de contacto elemento- pista interior en el modelo original.

El problema es que, al depender las fuerzas de las deformaciones obtenidas, se generan reacciones en el contacto elemento rodante-pista de alrededor de un 900% mayores que la fuerza inicial con la que se carga el rodamiento (Figura 5.50). La explicación es que las deformaciones que obtenía el programa original no eran deformaciones en sí. Curiosamente estos datos erróneos no provocan una desestabilización del sistema. Se hicieron numerosas pruebas, restando la mitad de la holgura al supuesto parámetro de deformación, con objeto de obtener las deformaciones reales, sólo para obtener resultados completamente inestables. Por tanto, se interpretó que esta supuesta deformación no era una deformación en sí, sino un desplazamiento del elemento, resultado de la suma de una fracción de la holgura y la deformación real. Por ello, se realizó la adición de bloques a los módulos de cálculo de las deformaciones internas y externas, recuadrados en rojo (Figura 5.51), que calculan las deformaciones y fuerzas que se muestran al usuario como datos finales.

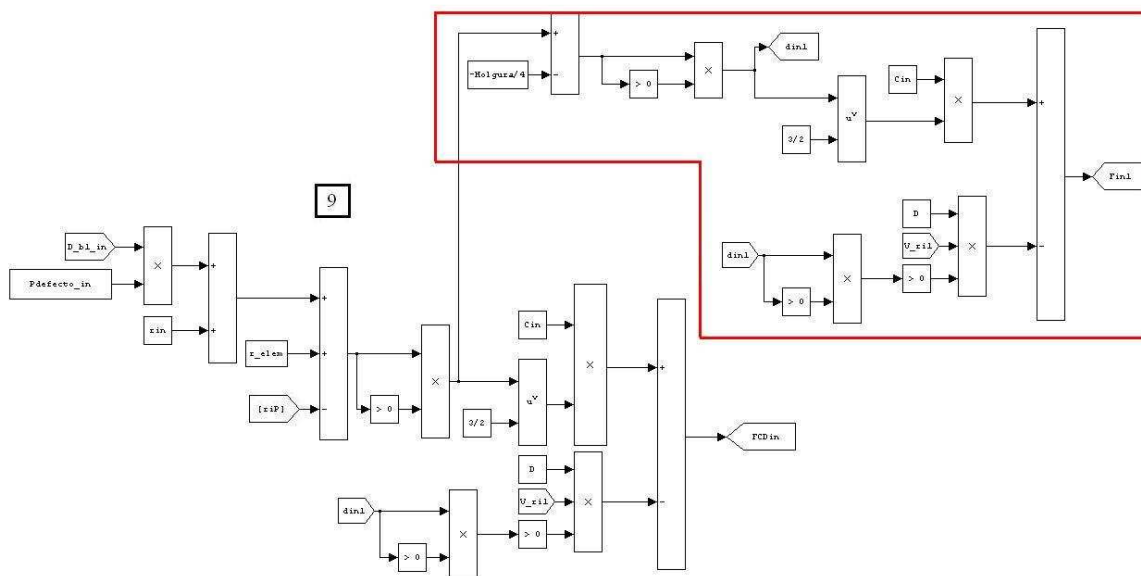


Figura 5.51. Adición de bloques para la obtención de las deformaciones y fuerzas reales.

Las modificaciones anteriores que se comentaron en el apartado 4 redujeron el valor en torno al que oscila la gráfica a una cuarta parte de la holgura, pero los resultados aún no eran correctos. Contando con la explicación del párrafo anterior, se dispuso un conjunto de bloques que calculase la deformación real, restando dicha fracción de la holgura y calculando la fuerza correcta.

Ante las mismas condiciones de simulación, se presentan en las Figuras 5.52 y 5.53 los resultados que se obtuvieron una vez se implementaron los bloques que se han mostrado en la Figura 5.51.

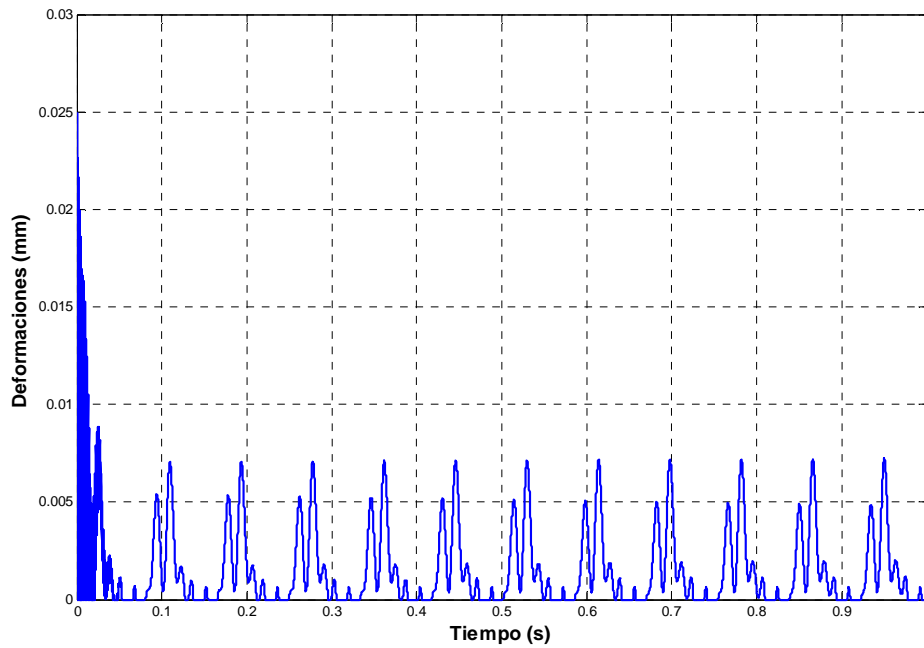


Figura 5.52. Deformaciones en el contacto elemento- pista interior para el modelo de Newton actual (5 G.D.L.)

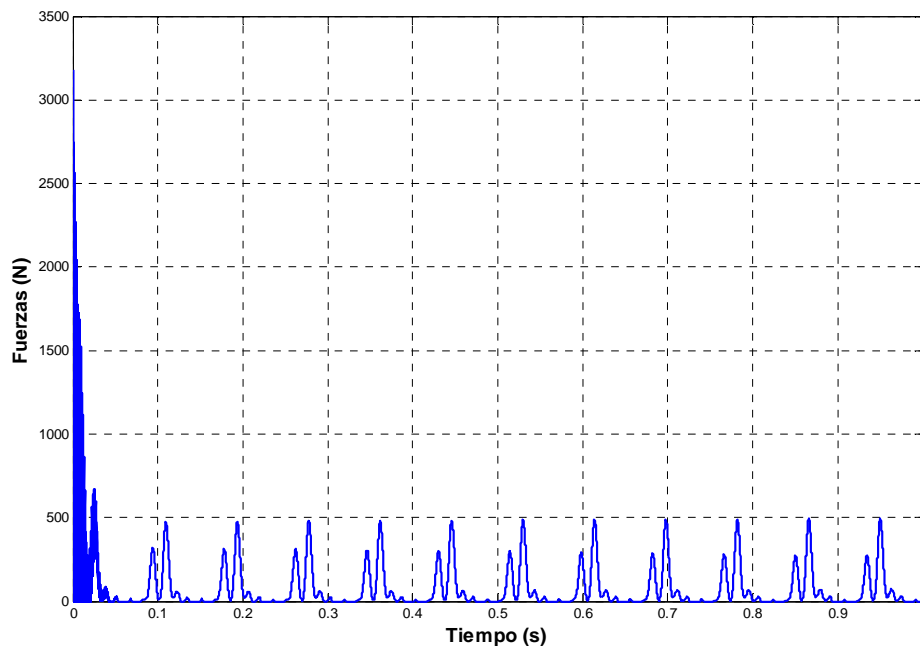


Figura 5.53. Fuerzas de contacto elemento- pista interior para el modelo de Newton actual (5 G.D.L.)

Como se ve en los resultados, las deformaciones son del orden de 10 veces inferiores y hay espacios de tiempo en los que no existe deformación. Además, a medida que se aumenta la fuerza exterior, aumentan estas fuerzas de reacción prácticamente en la misma proporción, como se pudo ver en las gráficas de tendencias, y como marcan las ecuaciones teóricas.

Cualquiera de los modelos recreados está diseñado para simulaciones ante carga radial, tanto de elementos rodantes del tipo bola o de tipo rodillo. A continuación, de forma teórica, se calcularán los resultados de los modelos de Newton de 3 y 9 elementos rodantes referentes a las fuerzas máximas que puede soportar cada elemento durante el funcionamiento.

5.2.5.1 Modelos de 5 G.D.L.

Este caso, dado el número de elementos rodantes, provoca que para una carga exterior determinada, existan posiciones de los elementos en las cuales un solo elemento soporte toda la carga, luego la carga máxima será equivalente a la exterior. Al observar las gráficas anteriores, puede apreciarse que el valor de la fuerza de contacto pista de rodadura interior- elemento rodante es aproximadamente de 500N. En los anexos se comprueba que la magnitud de la fuerza de contacto en pista externa es prácticamente similar, con lo cual la fuerza soportada por el elemento rodante es de unos 1000 N, lo cual coincide con la fuerza exterior.

5.2.5.2 Modelos de 11 G.D.L.

Para el caso de 9 elementos rodantes, utilizaremos las fórmulas de cálculo de las fuerzas sobre cada elemento que se expusieron en el capítulo 3. Primero hallamos la carga máxima sobre un elemento rodante respecto a la carga radial total.

$$Q_0 = \frac{F_r}{Z \cdot J_r}$$

Interpolando en la tabla 3.1 $1/J_r$ toma un valor de 4,36 para elementos rodantes tipo bola. Z toma un valor de 9. Por tanto:

$$Q_0 = 0,4844 \cdot Fr.$$

Para la distribución elegida, las fuerzas obtenidas, aplicando la ecuación 3.14, son:

$$Q_0 = 0,4844 \cdot Fr; \quad Q_1 = 0,32478 \cdot Fr; \quad Q_2 = 0,03505 \cdot Fr$$

Si se multiplica por la fuerza externa $Fr=1000$ N:

$$Q_0 = 484,4 \text{ N}; \quad Q_1 = 324,78 \text{ N}; \quad Q_2 = 35,05 \text{ N}$$

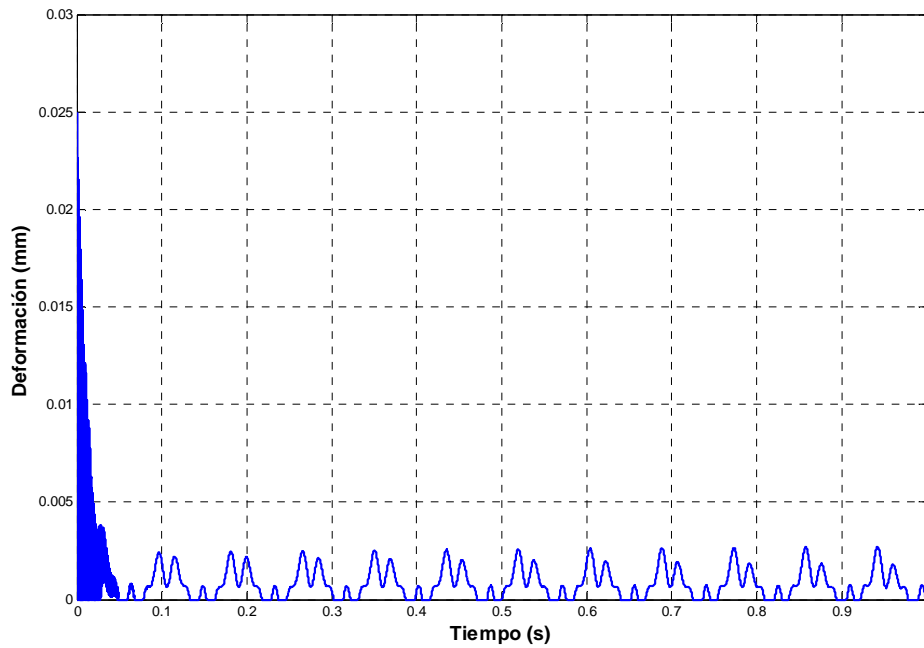


Figura 5.54. Deformaciones en el contacto elemento- pista interior para el modelo de Newton actual (11 G.D.L.)

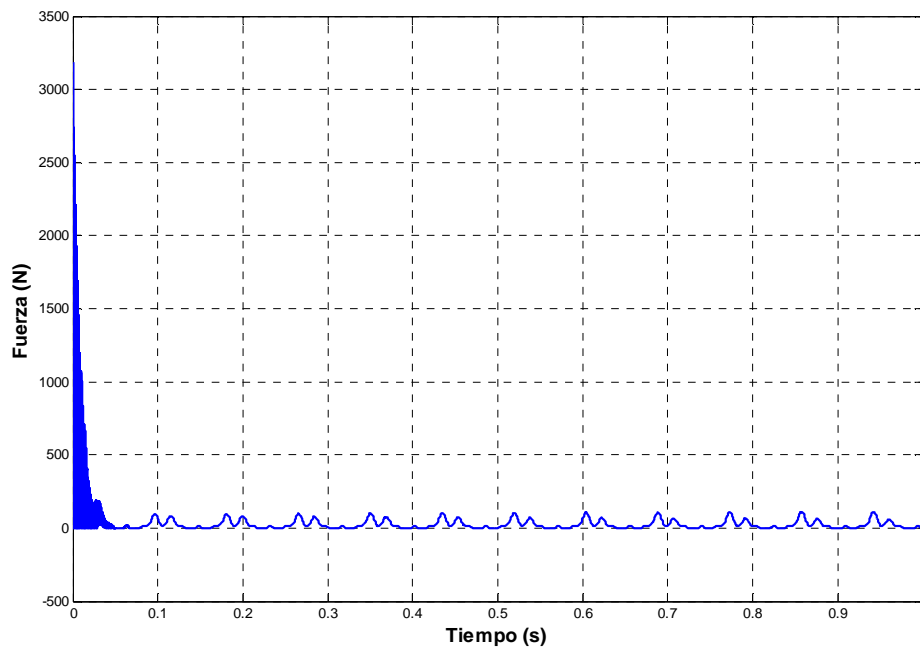


Figura 5.55. Fuerzas de contacto elemento- pista interior para el modelo de Newton actual (11 G.D.L.)

El modelo de 11 GDL no presenta la misma precisión. La fuerza de contacto de la pista interna con el elemento rodante llega aproximadamente a los 100N. Si lo sumamos a la deformación externa, aproximadamente del mismo valor, llegan a los 200N, lo cual queda lejos de los 484N que debería estar soportando cuando se encuentra en la posición de máxima carga.

En conclusión, puede decirse que las modificaciones realizadas al modelo y los nuevos parámetros calculados representan una importante evolución frente al modelo anterior. A pesar de que el comportamiento del modelo de 11 GDL no llega a ser todo lo preciso que se pretende, sigue presentando un comportamiento más real y dependiente de los parámetros de funcionamiento. Principalmente las diferencias de comportamiento del C.A.I. se deben a las modificaciones realizadas, mientras que el cambio que se ha producido en las fuerzas se debe a la reformulación realizada en el concepto teórico del modelo, en la cual la deformación que antes se obtenía era una suma de la misma deformación y la influencia de la holgura.

5.3 Análisis en frecuencia

5.3.1 Verificación de armónicos para rodamientos con defecto

El último paso para comprobar la validez de los modelos es el análisis frecuencial de la onda de aceleración generada por el centro del anillo interno. Recordemos que éste era uno de los parámetros que más susceptible era de ser controlado como indicador en el mantenimiento predictivo.

Hasta ahora se habían realizado todas las pruebas para modelos sin defecto alguno. Como se trata de una simulación, se considera que el rodamiento funciona en condiciones ideales, y el pico de frecuencia que mostraría se correspondería con la oscilación del sistema, sin ninguna otra muestra de frecuencia. Lo realmente importante del análisis de frecuencias es su aplicación para la detección de defectos, con lo que los casos que se muestran a continuación corresponden a defecto interior y exterior. El objetivo es comprobar si las frecuencias que en teoría deben obtenerse con cada tipo de defecto son las correctas.

Defecto en pista interior

La frecuencia correspondiente al caso de defecto interior es la BPFI, Ball Pass Freq. Inn, que obedece a la fórmula siguiente.

$$BPFI = \frac{Z \cdot \omega_{in}}{2} \cdot \left(1 + \frac{d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{d_m} \right) = 54,3 \text{ Hz}$$

Los parámetros que se utilizaron para la simulación fueron:

- Modelo de Newton de 3 elementos rodantes tipo bola.
- Diámetro medio: 46 mm.
- Diámetro de bola: 9.5 mm.
- Masa del rotor: 5 kg.
- Constante de amortiguamiento: 0.0152 N·mm/s.
- Constante de rigidez interior: 805.140 N/mm^{3/2}.

CAPÍTULO 5: PRUEBAS DE ESTABILIDAD-LINEALIDAD

- Constante de rigidez exterior: $872.780 \text{ N/mm}^{3/2}$.
- Profundidad de defecto: 0.03 mm.
- Ángulo abarcado por el defecto: 15° .
- Fuerza exterior en dirección x: 0 N.
- Fuerza exterior en dirección y: 2000 N.
- Fuerza de desequilibrio del rotor: 100 N.
- Velocidad de rotación del rotor: 1.800 rpm (30 Hz).
- Tiempo de simulación: 1 s.
- Frecuencia de muestreo: 10.000 Hz.

El resultado de las coordenadas para la aceleración es el mostrado en la figura 5.56.

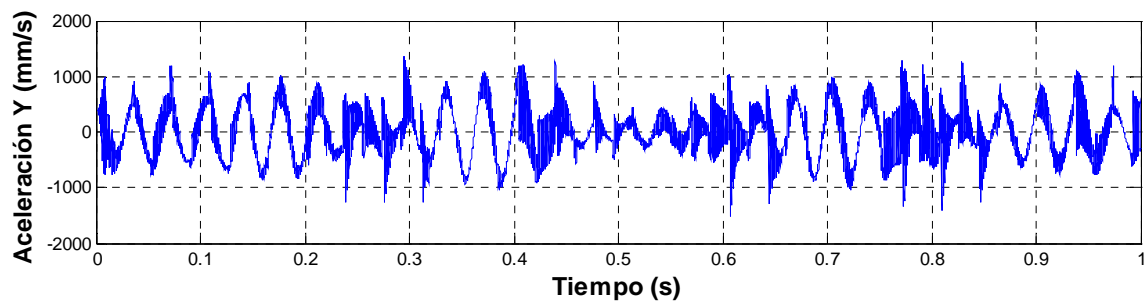


Figura 5.56. Evolución de la aceleración en dirección Y en el tiempo.

Utilizando los módulos de descomposición de la señal en frecuencias, se obtiene el espectro de la señal temporal que se muestra en la Figura 5.57, y el espectro de la envolvente de la señal de la Figura 5.58:

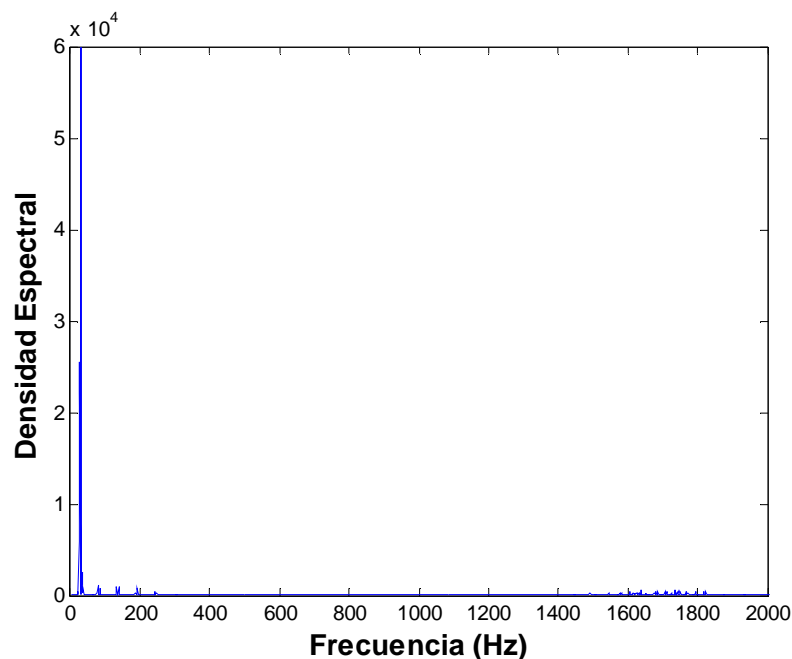


Figura 5.57. Espectro de la señal temporal de la coordenada Y de la aceleración del C.A.I.

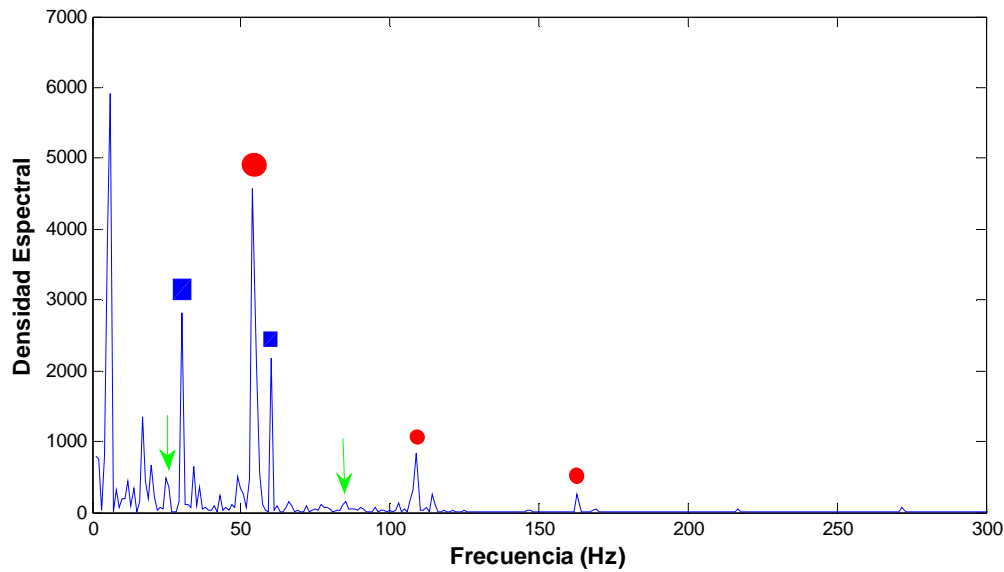


Figura 5.58. Espectro de la envolvente de la señal temporal de la coordenada Y de la aceleración del C.A.I.

En primer lugar, marcada con el mayor cuadrado azul, se encuentra la frecuencia de giro del rodamiento, y su primer armónico, señalado con un cuadrado de menor tamaño:

- Frecuencia giro: 30 Hz.
- Frecuencia 1er armónico de giro: 60 Hz.

Como puede verse, el pico principal se obtiene a los 54 Hz, frecuencia igual a la calculada, marcada por el círculo rojo de mayor tamaño. Los armónicos 1 y 2, marcados con círculos rojos más pequeños, se encuentran a las frecuencias:

- Armónico 1= $2 \cdot \text{BPFI} = 180,6 \text{ Hz}$
- Armónico 2= $3 \cdot \text{BPFI} = 230,9 \text{ Hz}$.

Asimismo, los armónicos de dicha frecuencia principal, marcadas con flechas verdes, se encuentran a las frecuencias:

- Armónico inferior = $\text{BPFI} - \text{Frec. Velocidad de giro} = 54,3 - 30 = 24,3 \text{ Hz}$.
- Armónico superior = $\text{BPFI} + \text{Frec. Velocidad de giro} = 54,3 + 30 = 84,3 \text{ Hz}$.

Defecto en pista exterior

La frecuencia correspondiente al caso de defecto interior es la BPFO, Ball Pass Freq. Out, que obedece a la fórmula siguiente.

$$BPFO = \frac{Z \cdot \omega_{in}}{2} \cdot \left(1 - \frac{d_{bo} \cdot \cos(\alpha)}{d_m} \right) = 35,7 \text{ Hz}$$

Los parámetros que se utilizaron para la simulación fueron los mismos que para el caso anterior, diferenciándose sólo en los parámetros del defecto.

- Profundidad de defecto: 0.03 mm.
- Longitud del defecto: 10 mm.

El resultado de las coordenadas para la aceleración el mostrado en la figura 5.59:

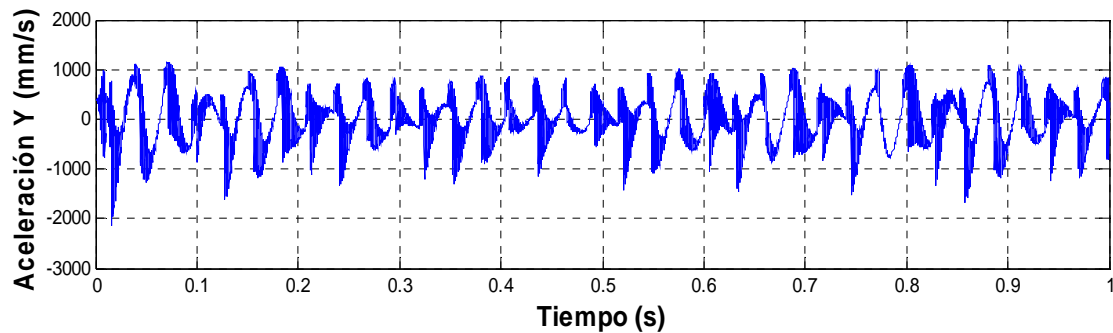


Figura 5.59. Evolución de la aceleración en dirección Y en el tiempo.

Utilizando los módulos de descomposición de la señal en frecuencias, se obtiene el espectro de la señal temporal que se muestra en la Figura 5.60, y el espectro de la envolvente de la señal de la Figura 5.61:

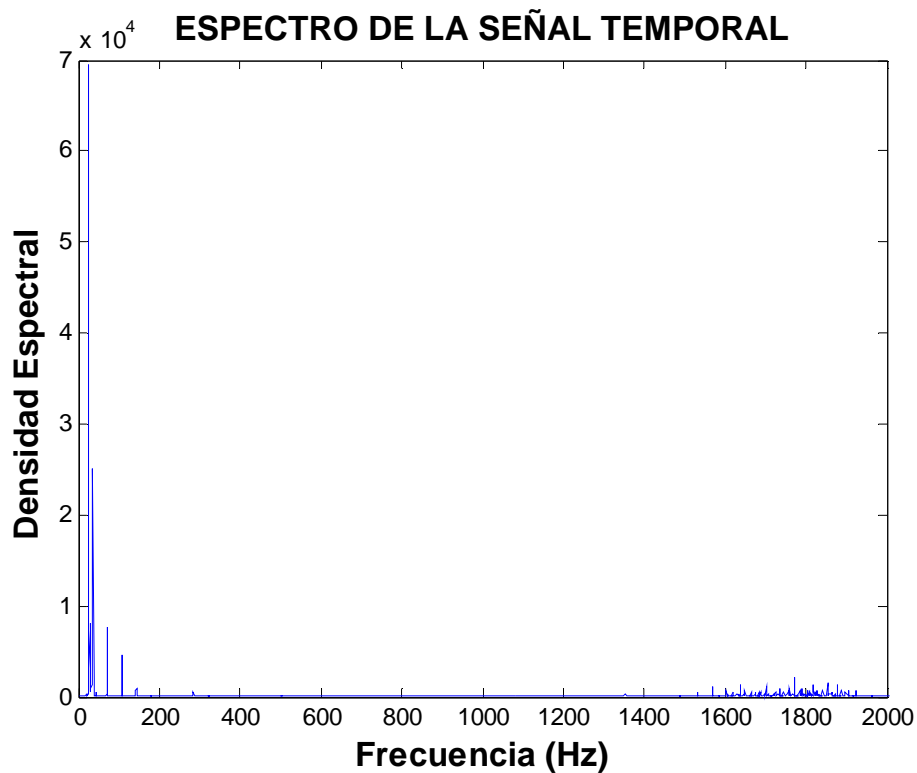


Figura 5.60. Espectro de la señal temporal de la coordenada Y de la aceleración del C.A.I.

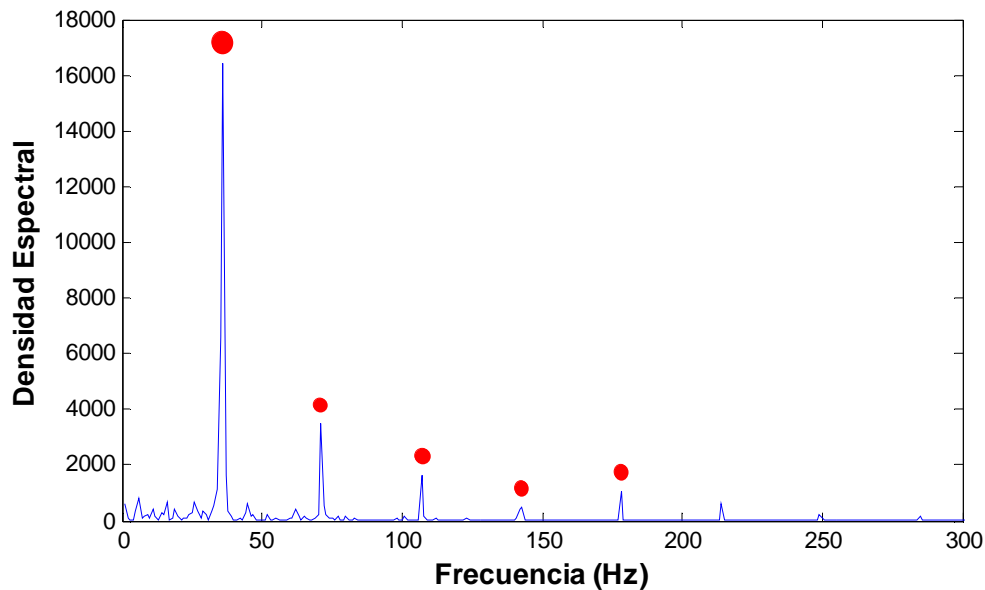


Figura 5.61. Espectro de la envolvente de la señal temporal de la coordenada Y de la aceleración del C.A.I.

Como puede verse, el pico principal se obtiene a los 36 Hz, frecuencia igual a la calculada, marcada con un círculo rojo grande. Asimismo, los armónicos de dicha frecuencia principal, que se señalan con círculos rojos de menor tamaño, se encuentran a las frecuencias:

- BPFO= 35,7 Hz.
- 1er armónico BPFO= $2 \cdot \text{BPFO} = 71,4$ Hz
- 2o armónico BPFO= $3 \cdot \text{BPFO} = 107,1$ Hz
- 3er armónico BPFO= $4 \cdot \text{BPFO} = 142,8$ Hz
- 4o armónico BPFO= $5 \cdot \text{BPFO} = 178,5$ Hz

Las frecuencias obtenidas en las simulaciones para los dos tipos de defectos coinciden con las teóricas y el comportamiento de los modelos es muy aproximado al teórico, y similar a los que se obtienen en la tesis original.

Una vez verificado que el análisis en frecuencias arroja resultados favorables, se realizan 2 nuevas series de experimentos:

- La primera es una comparación entre las señales temporales y los espectros de frecuencias del rodamiento sin defecto, con defecto en pista interior y en pista exterior.
- La segunda consta de un barrido de simulaciones para comprobar el comportamiento del sistema frente a la variación de velocidad de rotación del rotor.

5.3.2 Comparación de señales temporales y espectros de frecuencias

La aparición de defectos del tipo que se han implementado genera variaciones en la señal de tipo impulsivo. Si el rodamiento carece de defecto, se obtiene una onda bastante limpia, como se muestra en las figuras X e Y. La aparición de defectos en las pistas del rodamiento genera los mencionados picos, con una diferencia según la pista donde se encuentre el defecto.

Para los defectos en la pista interior, la magnitud de los picos depende de la posición en la cual se encuentre el elemento rodante al encontrar al defecto. Esto es, si en el momento de encuentro el elemento rodante se halla en una zona muy cargada, el pico apreciado será muy alto, mientras que en una zona poco cargada los valores son más reducidos, e incluso inexistentes.

En el caso de un defecto en la pista exterior, al considerar la inmovilidad del anillo exterior, los picos serán prácticamente constantes, siendo su magnitud dependiente de la zona de carga en la que se encuentre el defecto.

En los espectros de la envolvente de la señal, se observó que en el caso de defecto en pista interior se obtiene un número mucho mayor de frecuencias, aunque muchas de ellas son de baja magnitud. La onda asociada a este tipo de defectos suele ser más “sucia” que la del caso de defecto en pista exterior, por lo que dichas anomalías significan mayor cantidad de frecuencias. La distribución de las mismas sigue con bastante exactitud el esquema analizado en el punto anterior.

Las wavelet muestran aquí una de las ventajas que esta técnica de análisis frecuencial ofrece. A baja escala muestran las componentes de alta frecuencia, mientras que a escalas medias y bajas aparecen las componentes asociadas a los defectos, marcadas en rojo. Pero es de resaltar que se pueden apreciar claramente las trazas que marcan el momento de contacto elemento rodante- pista, mucho más numerosas en el caso de 11 G.D.L. que en el de 5 G.D.L. Incluso si se observan los casos de rodamiento sin defecto, en los primeros instantes de tiempo se produce un estado transitorio, que es interpretado por la wavelet como una componente de alta frecuencia en la esquina inferior izquierda. Para estos análisis wavelet se emplea la wavelet Daubechies de orden 5.

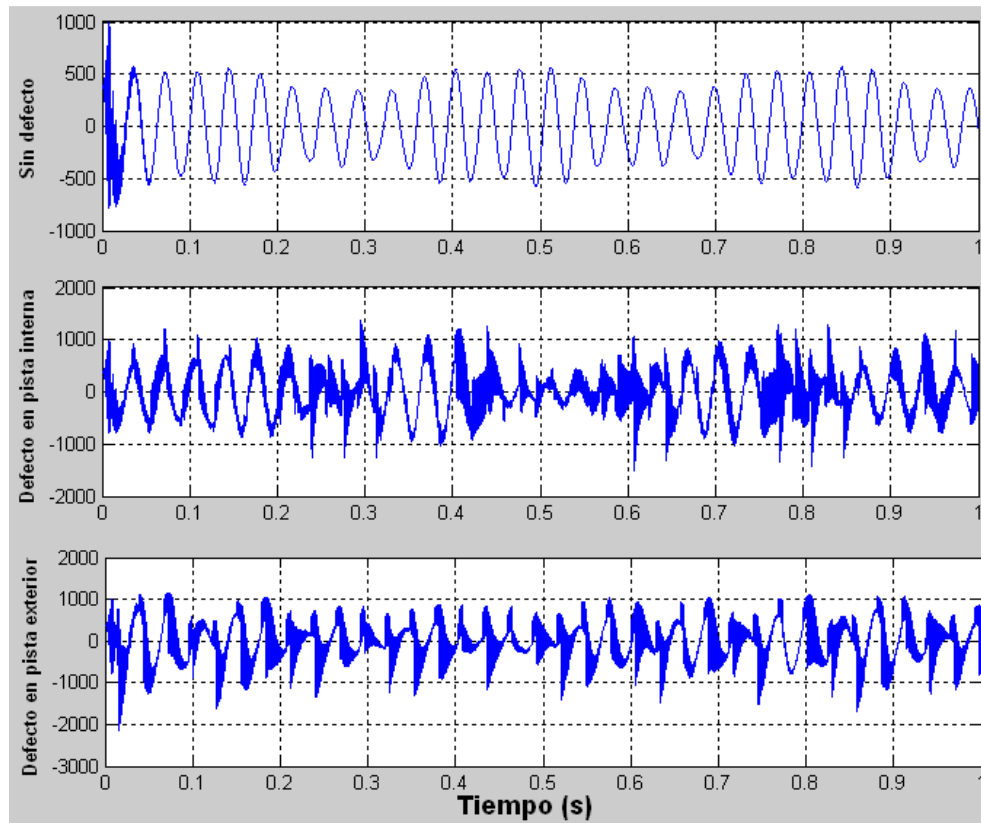


Figura 5.62. Comparativa de las señales de aceleración para los casos contemplados por el programa (Modelo de 5 G.D.L.)

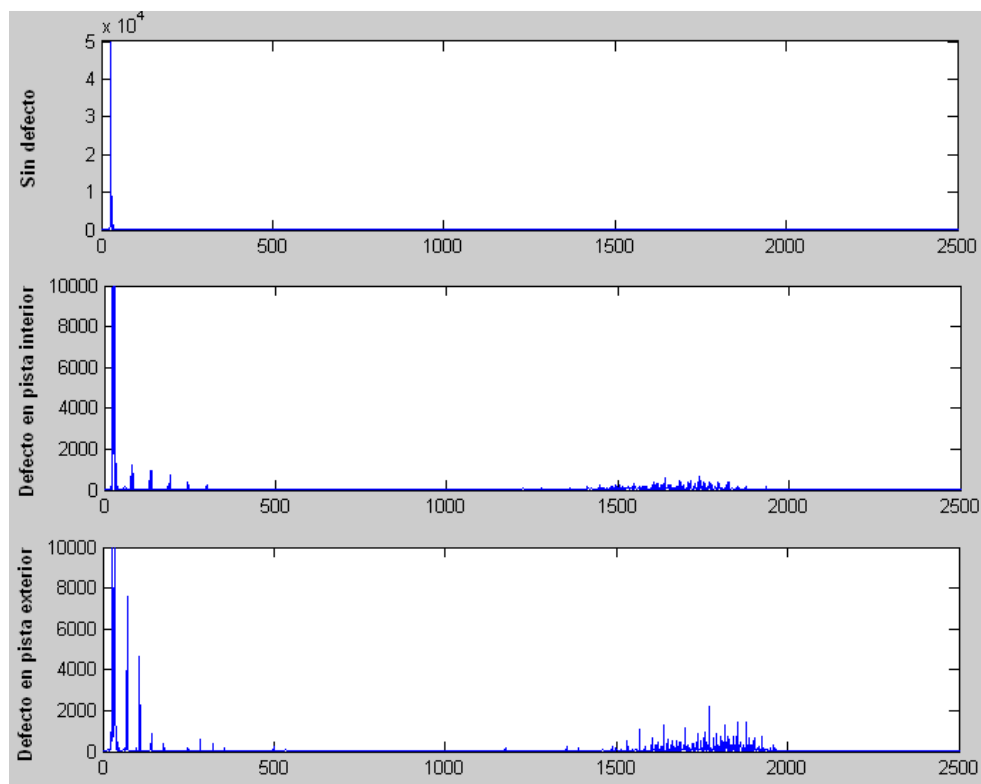


Figura 5.63. Comparativa de los espectros de la señal para los casos contemplados por el programa. (Modelo de 5 G.D.L.)

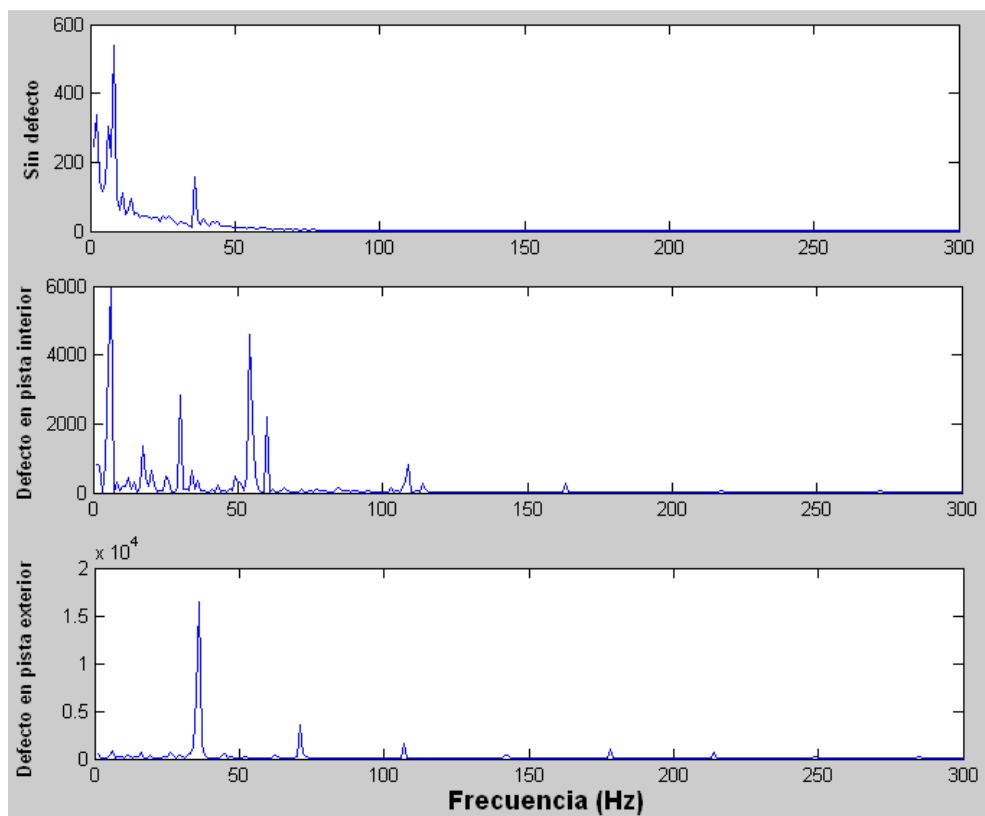


Figura 5.64. Comparativa de los espectros de la envolvente para los casos contemplados por el

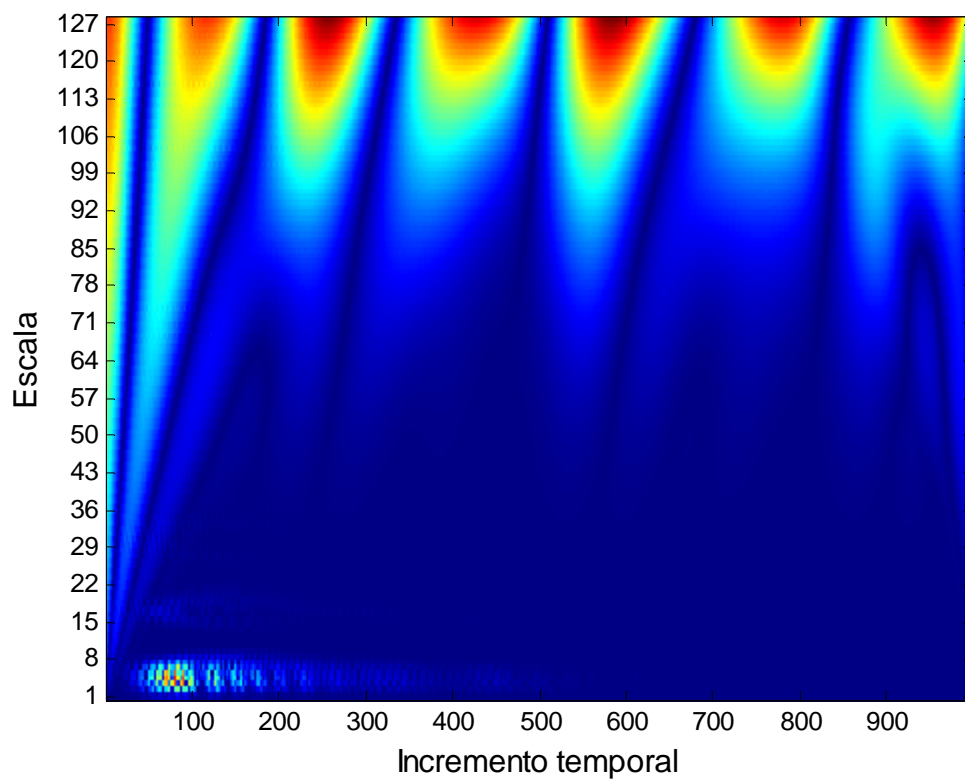


Figura 5.65. Wavelets para el caso de rodamiento sin defecto (Modelo de 5 G.D.L.).

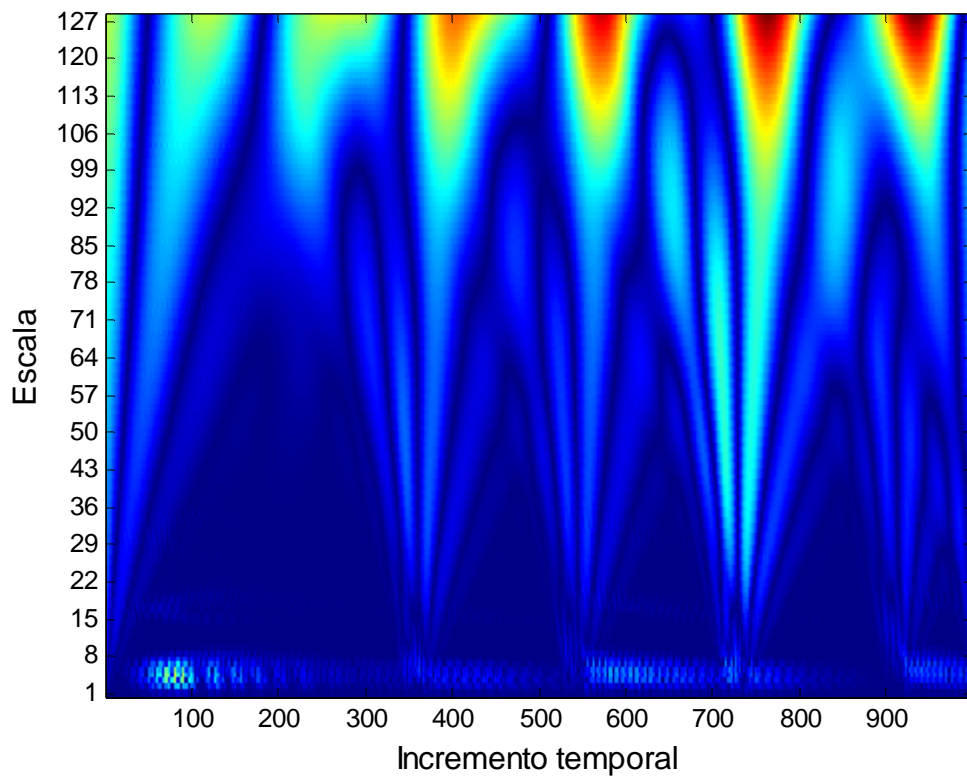


Figura 5.66. Wavelets para el caso de rodamiento con defecto en pista interior (Modelo de 5 G.D.L.).

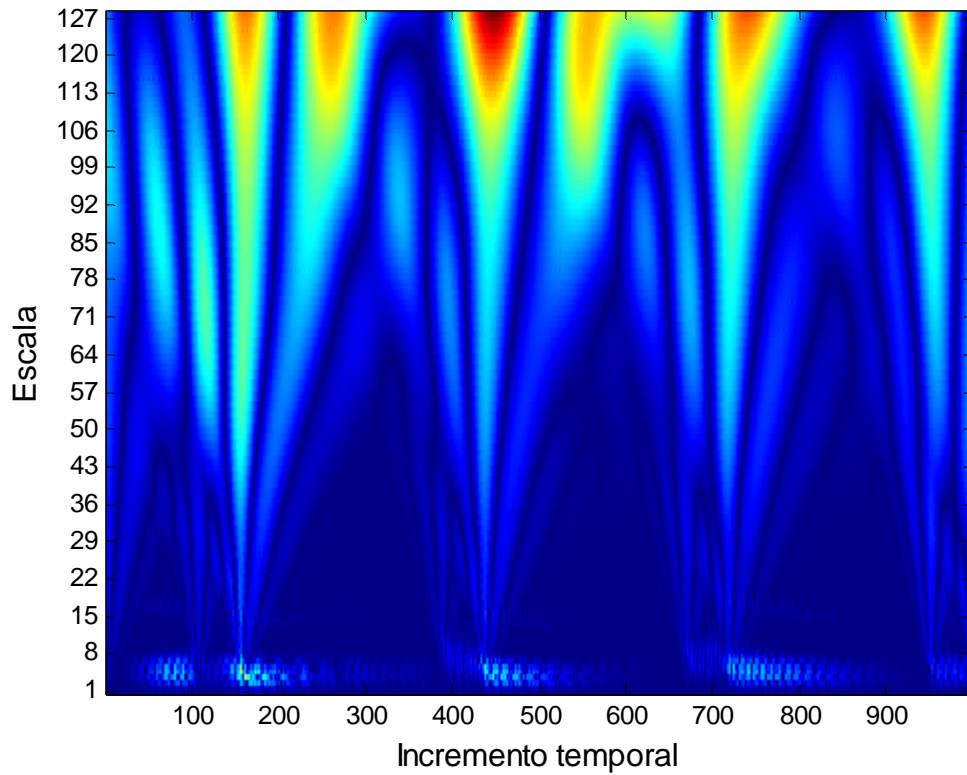


Figura 5.67. Wavelets para el caso de rodamiento con defecto en pista exterior (Modelo de 5 G.D.L.).

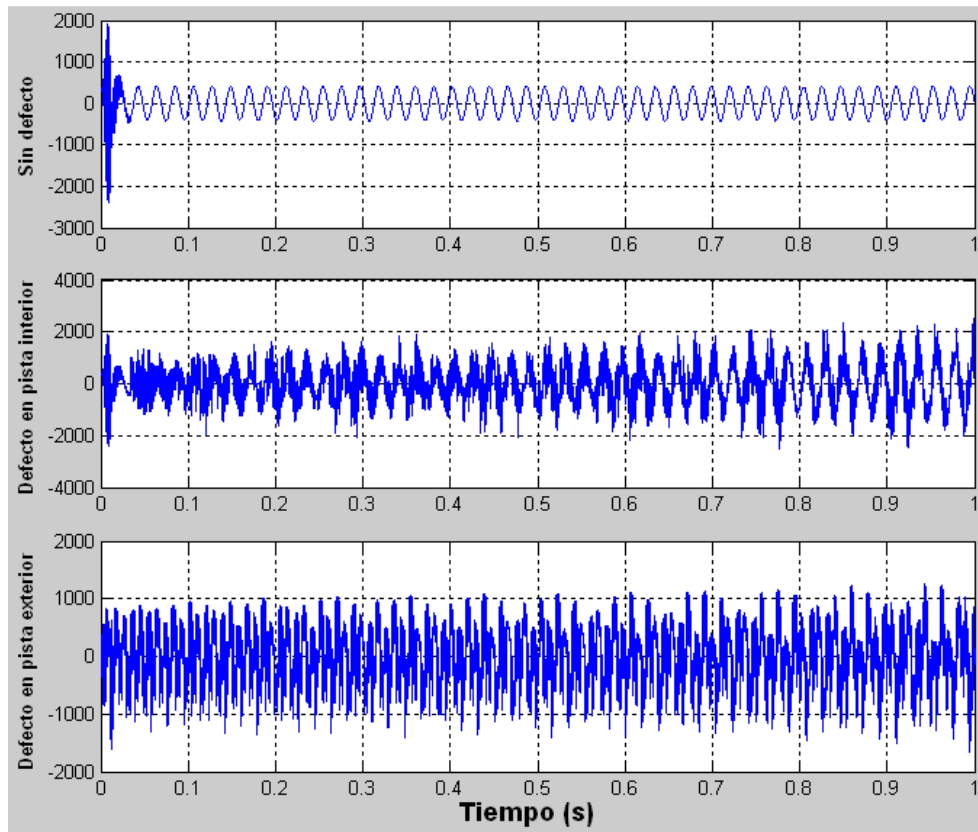


Figura 5.68. Comparativa de las señales de aceleración para los casos contemplados por el programa.
(Modelo de 11 G.D.L.)

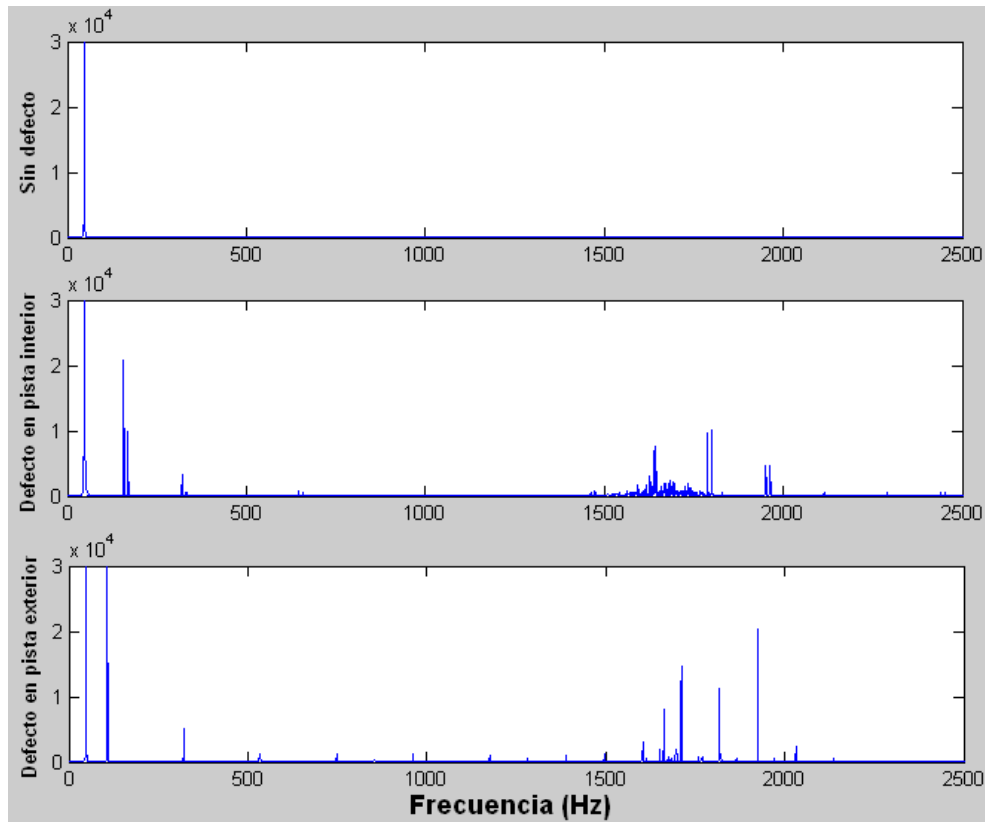


Figura 5.69. Comparativa de los espectros de la señal para los casos contemplados por el programa.
(Modelo de 11 G.D.L.)

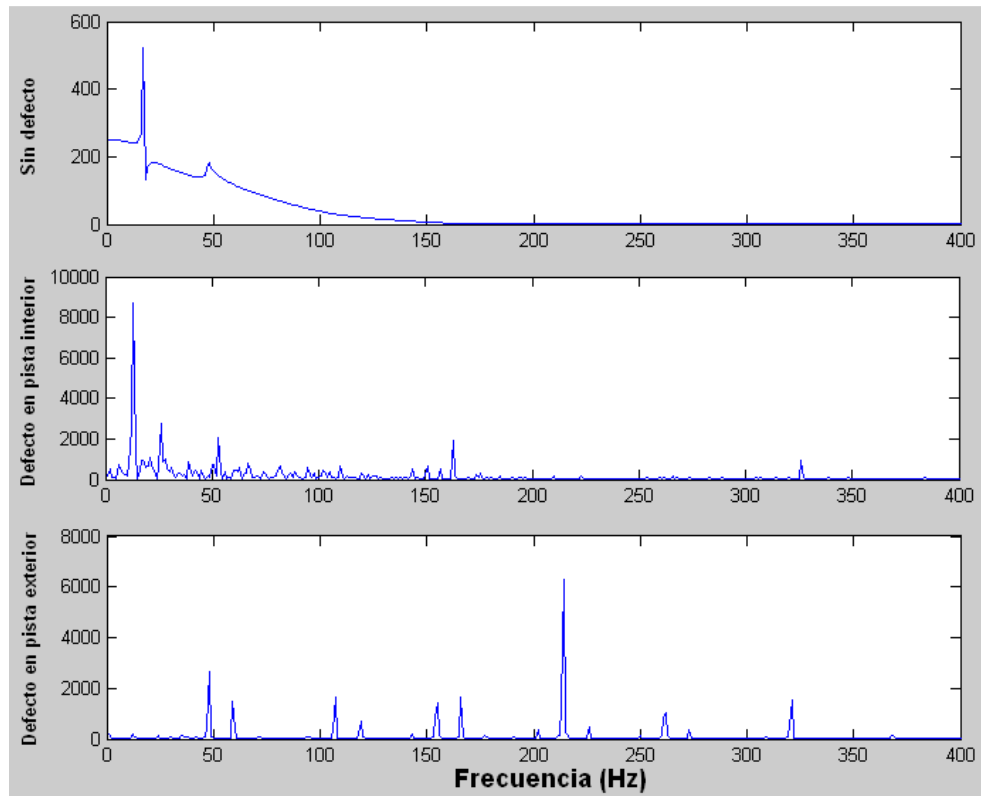


Figura 5.70. Comparativa de los espectros de la envolvente para los casos contemplados por el programa. (Modelo de 11 G.D.L.)

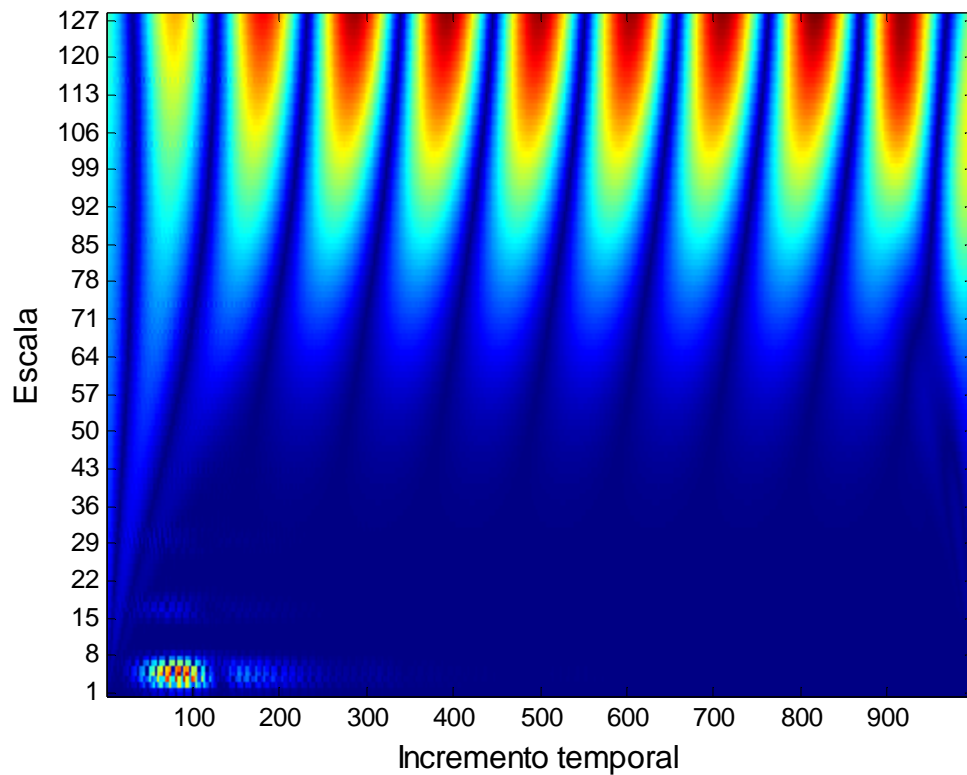


Figura 5.71. Wavelets para el caso de rodamiento sin defecto (Modelo de 11 G.D.L.).

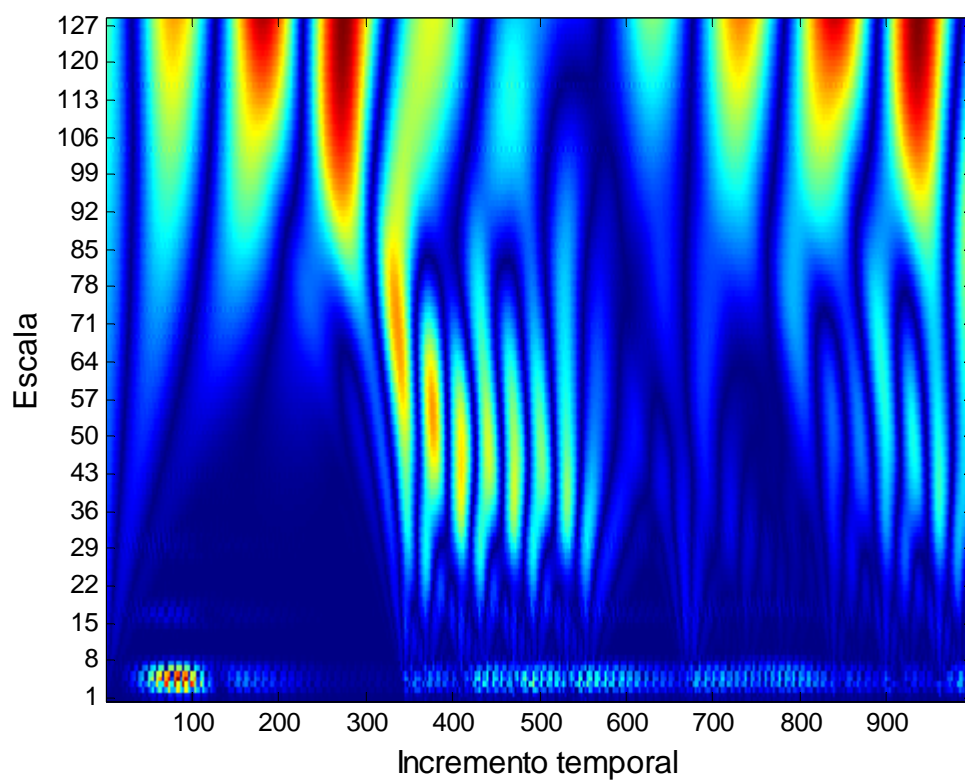


Figura 5.72. Wavelets para el caso de rodamiento con defecto en pista interior (Modelo de 11 G.D.L.).

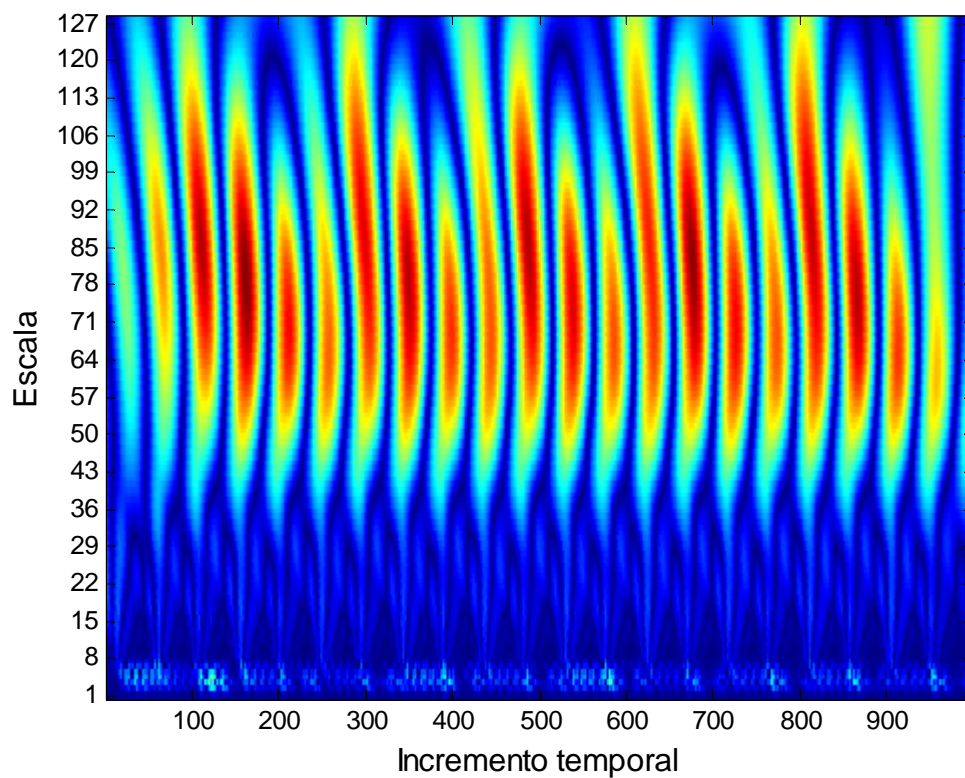


Figura 5.73. Wavelets para el caso de rodamiento con defecto en pista exterior (Modelo de 11 G.D.L.).

5.3.3 Comparación de señales a distintas velocidades de rotación: Modelo de 5 G.D.L.

La influencia de la carga en el comportamiento frecuencial es poco importante, aumentando ligeramente los picos de las frecuencias obtenidas en los espectros de señal y envolvente, pero apenas modificando su posición.

Sí es importante en este sentido la velocidad de rotación, el único parámetro variable de la ecuación de BPFI y BPFO, siendo el resto parámetros geométricos. El resultado que debe obtenerse es un incremento proporcional a la velocidad de las frecuencias a las que se encuentran las BPFI y BPFO y sus armónicos. Las condiciones de simulación son las mismas que las de los análisis anteriores, y se utilizan 4 velocidades de rotación diferentes: 10 Hz, 20 Hz, 30 Hz y 40 Hz (600, 1200, 1800 y 2400 rpm, respectivamente).

5.3.3.1 Defecto en pista interior

En lo que se refiere a las señales temporales, el resultado puede parecer extraño, ya que los valores de los picos obtenidos tienden a decrecer con el aumento de la velocidad, pero debe recordarse que, a igualdad de tamaño de defecto, el tiempo de contacto entre elemento rodante y defecto es menor, por lo que la señal se estabiliza antes. Por ello se observa en los espectros de la señal envolvente cómo los valores asociados a los picos no siguen una tendencia clara con el aumento de velocidad. Además, debe recordarse que el aumento de la velocidad de rotación no provocaba variaciones apreciables en el valor de la aceleración, y salvo en el caso de la frecuencia de rotación de 10 Hz, los valores pico a pico son bastante similares.

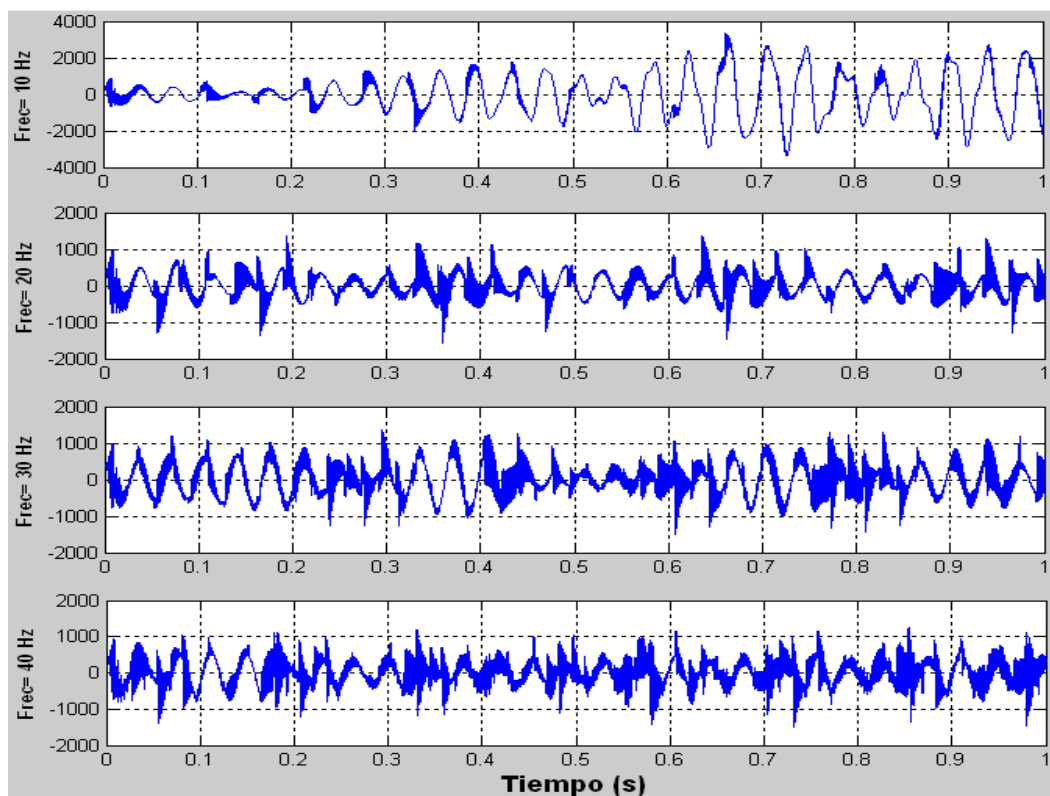


Figura 5.74. Señales de aceleración para diferentes velocidades de rotación del rotor. (Modelo de 5 G.D.L.)

Los resultados son evidentes en los espectros de la señal: los picos correspondientes a los defectos de las gráficas de espectros de la señal temporal (situados entre los 1200-2000 Hz) se hacen mayores con cada aumento de velocidad, tanto para defecto en pista interior como en pista exterior. Esto es debido a que un aumento de velocidad genera más encuentros elementos rodantes- defecto, con lo que los picos se hacen más numerosos y el cómputo global de la energía asociada a ellos aumenta.

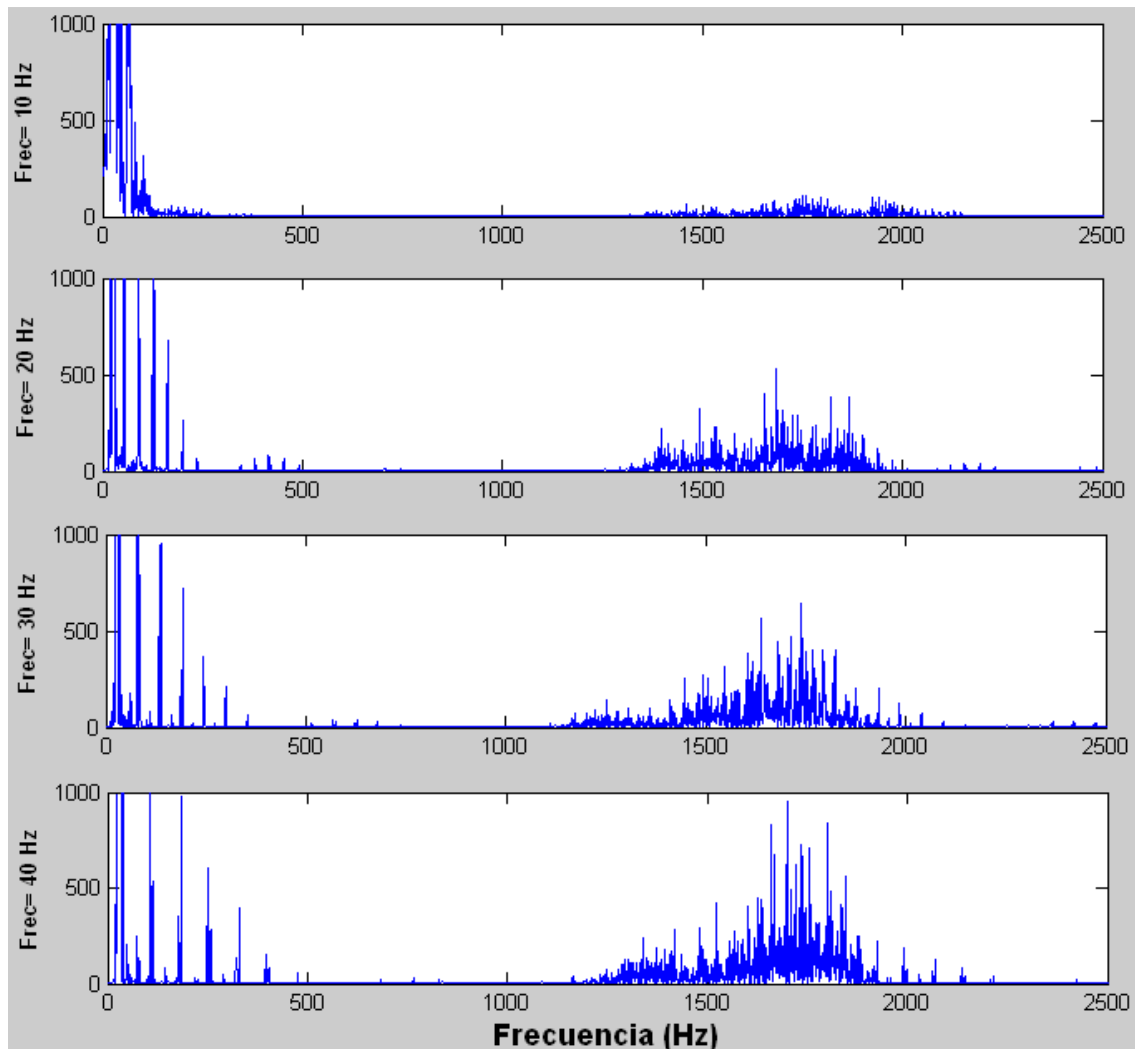


Figura 5.75. Espectros de la señal para diferentes velocidades de rotación del rotor. (Modelo de 5 G.D.L.)

En cuanto a los espectros de la envolvente de la señal temporal, las predicciones también se cumplen: tanto la frecuencia principal como sus armónicos se desplazan en frecuencia de acuerdo a un factor que depende de la relación entre las velocidades: así, para una frecuencia de rotación de 10 Hz (600 rpm) se tendrá una frecuencia asociada al defecto de X , mientras que para una frecuencia de rotación de 20 Hz (1200 rpm), la frecuencia asociada al defecto será de $2 \cdot X$.

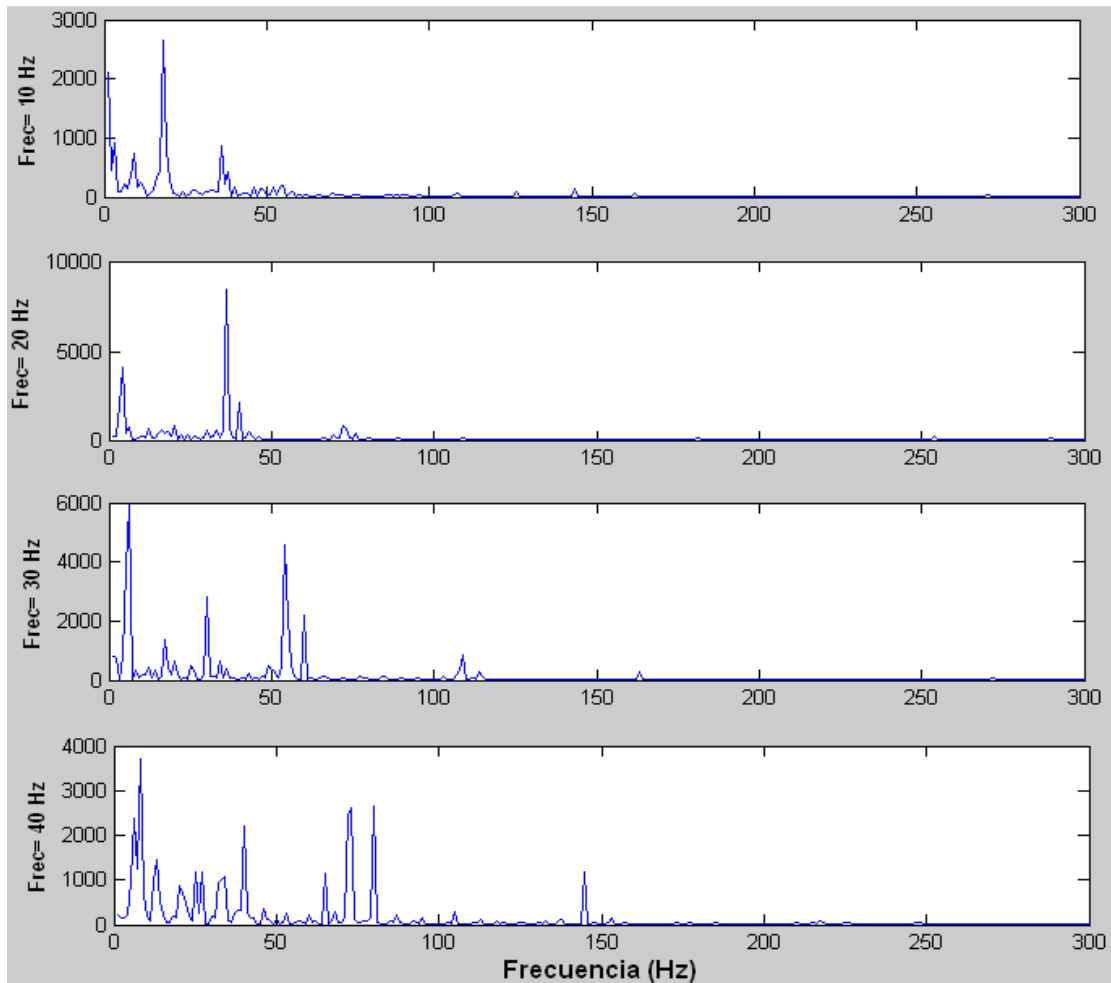


Figura 5.76. Espectros de la envolvente para diferentes velocidades de rotación del rotor. (Modelo de 5 G.D.L.)

En cuanto al apartado de las wavelet, a medida que la velocidad de rotación aumenta, se hacen más evidentes las componentes de alta frecuencia (baja escala), y la presencia del defecto cada vez mayor, apreciándose en los trazos rojos de los componentes de las altas escalas (bajas frecuencias) y en las componentes de alta frecuencia a bajas escalas, que se hacen cada vez más visibles. La wavelet utilizada para el análisis de la señal ha sido una Daubechies de orden 5.

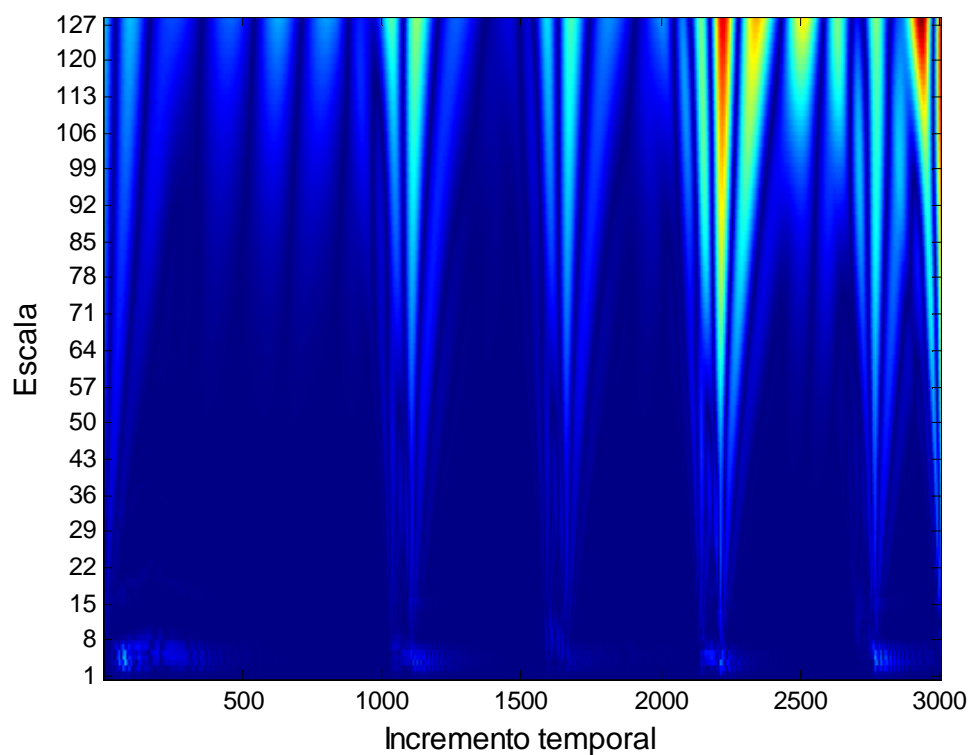


Figura 5.77. Wavelets para velocidad de rotación del rotor de 10 Hz (Modelo de 5 G.D.L.).

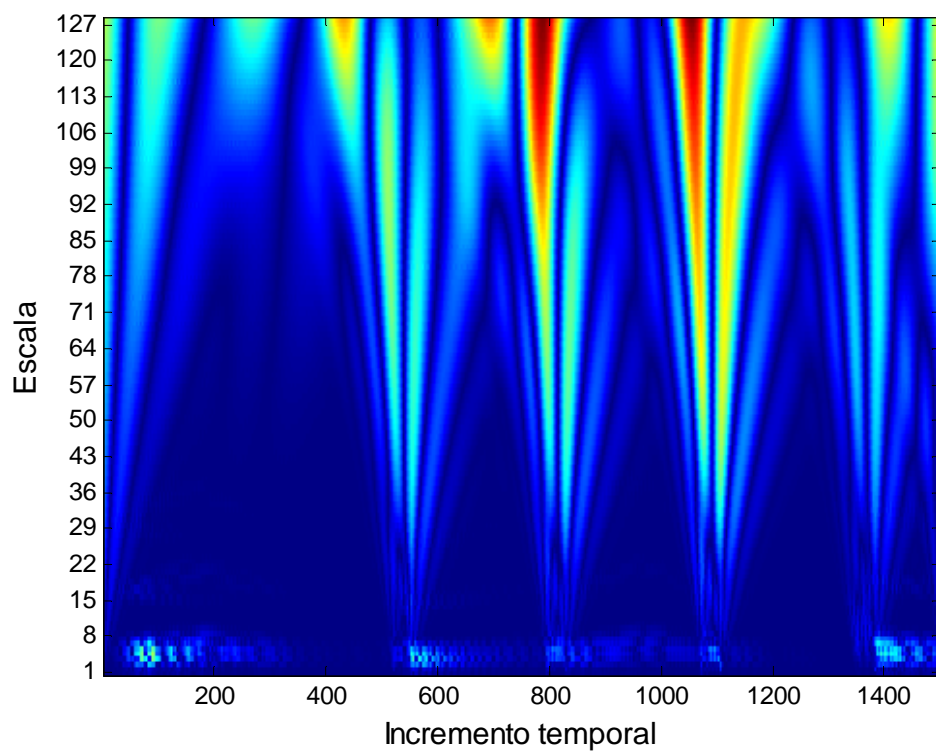


Figura 5.78. Wavelets para velocidad de rotación del rotor de 20 Hz (Modelo de 5 G.D.L.).

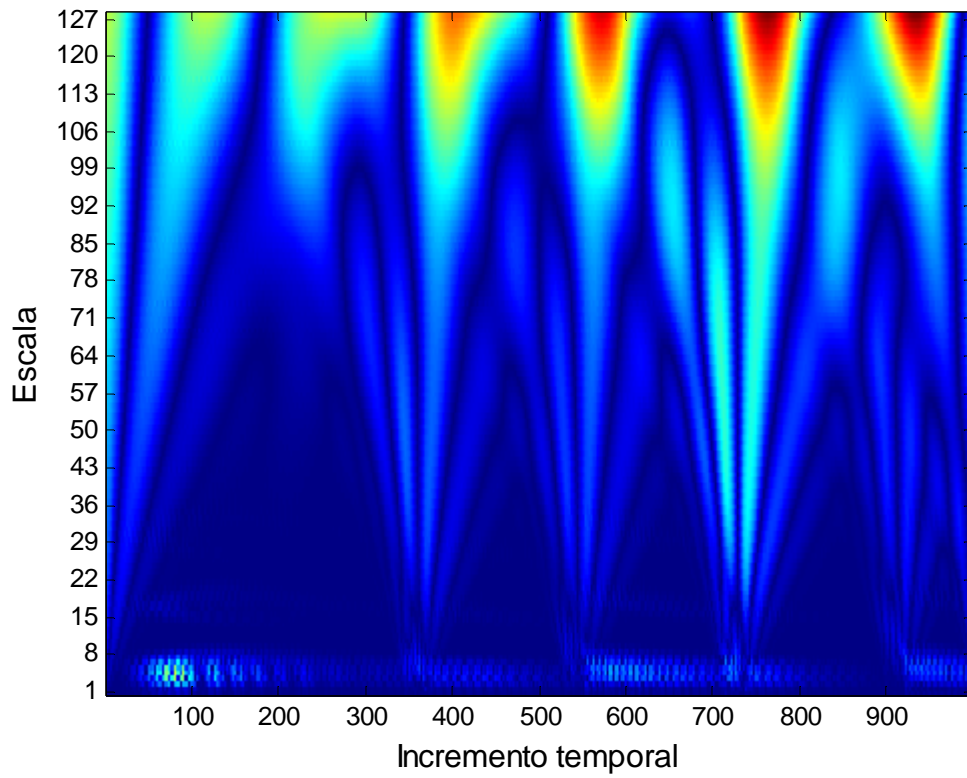


Figura 5.79. Wavelets para velocidad de rotación del rotor de 30 Hz (Modelo de 5 G.D.L.).

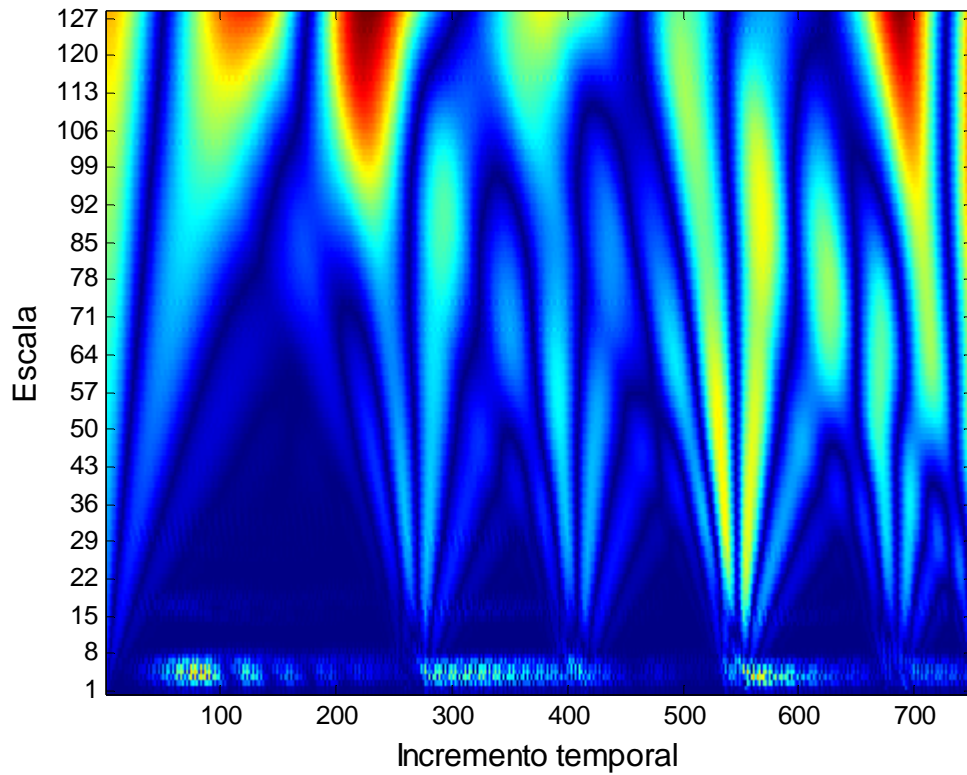


Figura 5.80. Wavelets para velocidad de rotación del rotor de 40 Hz (Modelo de 5 G.D.L.).

5.3.3.2 Defecto en pista exterior

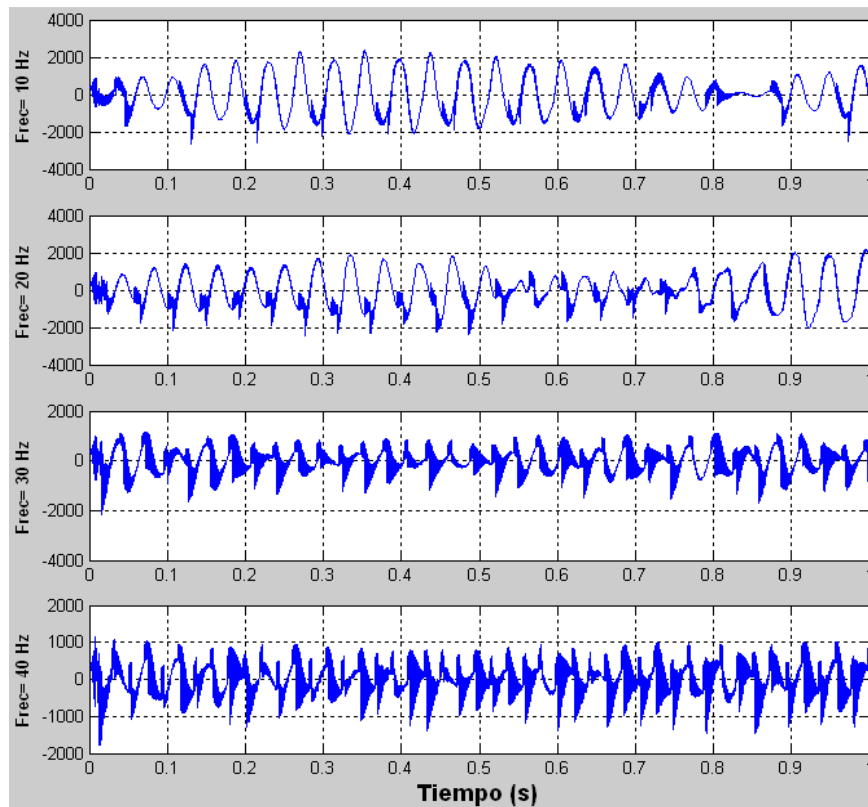


Figura 5.81. Señales de aceleración para diferentes velocidades de rotación del rotor. (Modelo de 5 G.D.L.)

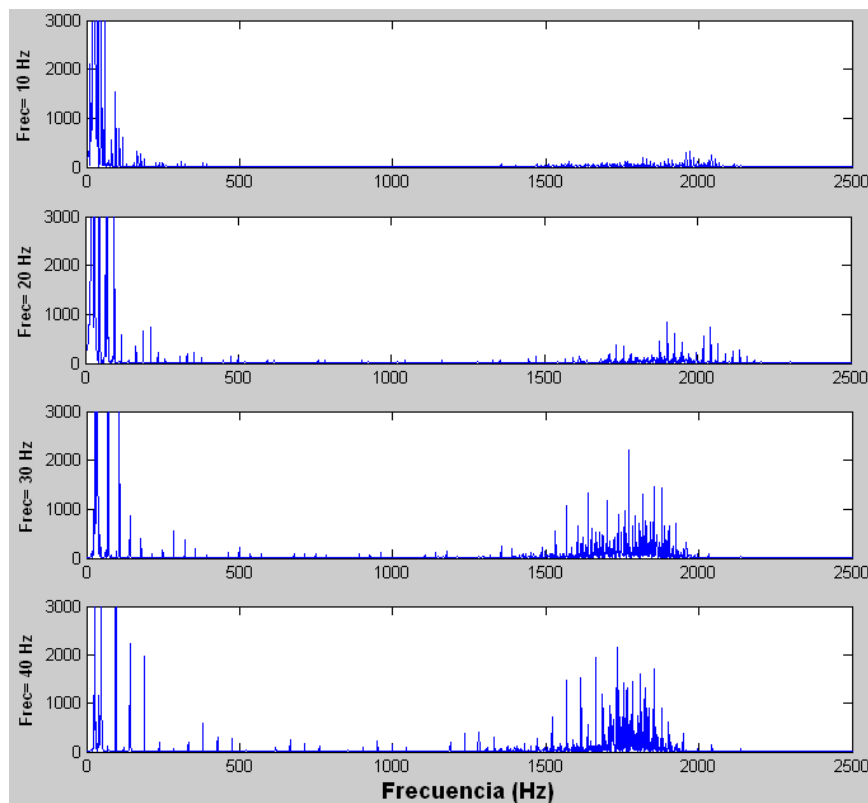


Figura 5.82. Espectros de la señal para diferentes velocidades de rotación del rotor. (Modelo de 5 G.D.L.)

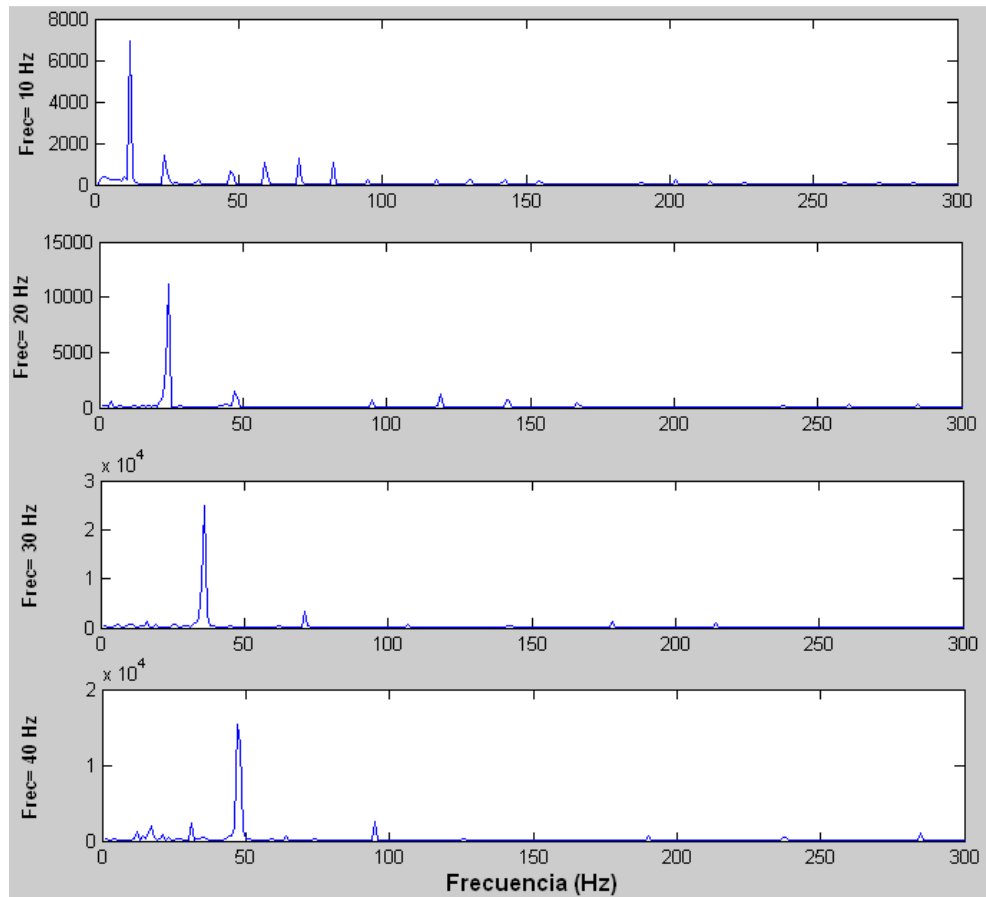


Figura 5.83. Espectros de la envolvente para diferentes velocidades de rotación del rotor. (Modelo de 5 G.D.L.)

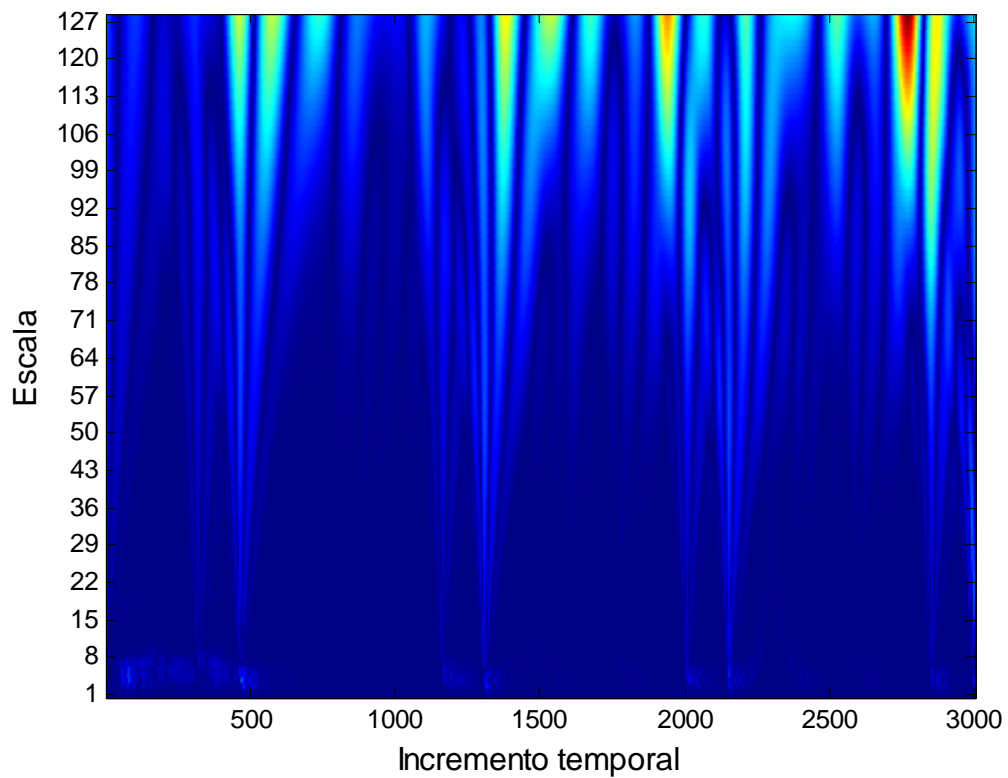


Figura 5.84. Wavelets para velocidad de rotación del rotor de 10 Hz (Modelo de 5 G.D.L.).

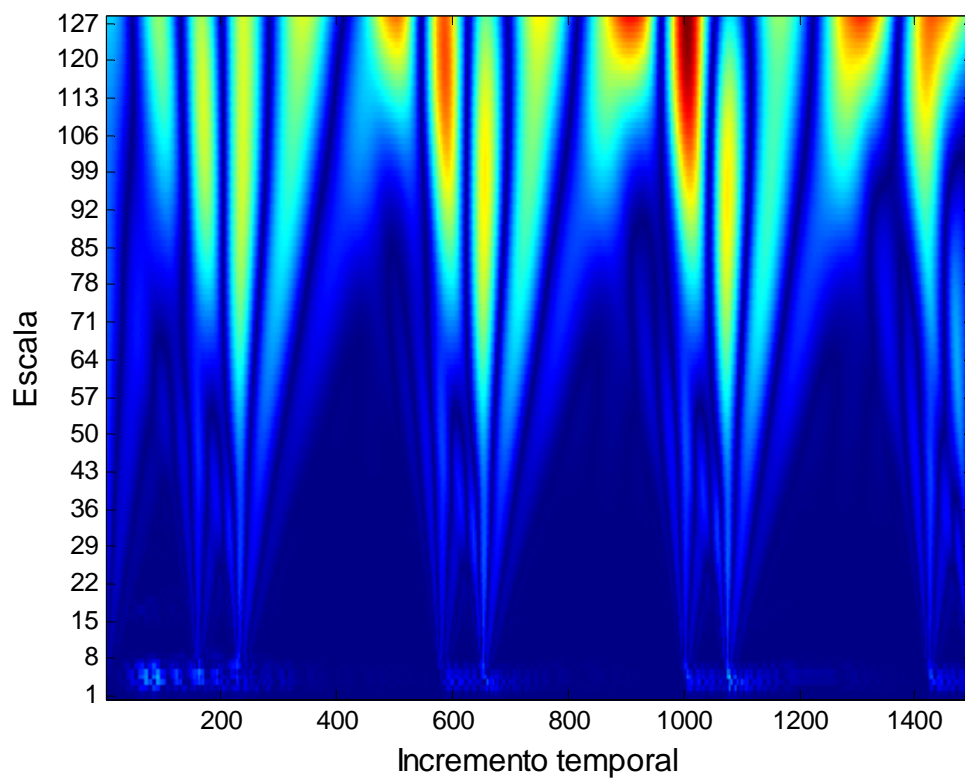


Figura 5.85. Wavelets para velocidad de rotación del rotor de 20 Hz (Modelo de 5 G.D.L.).

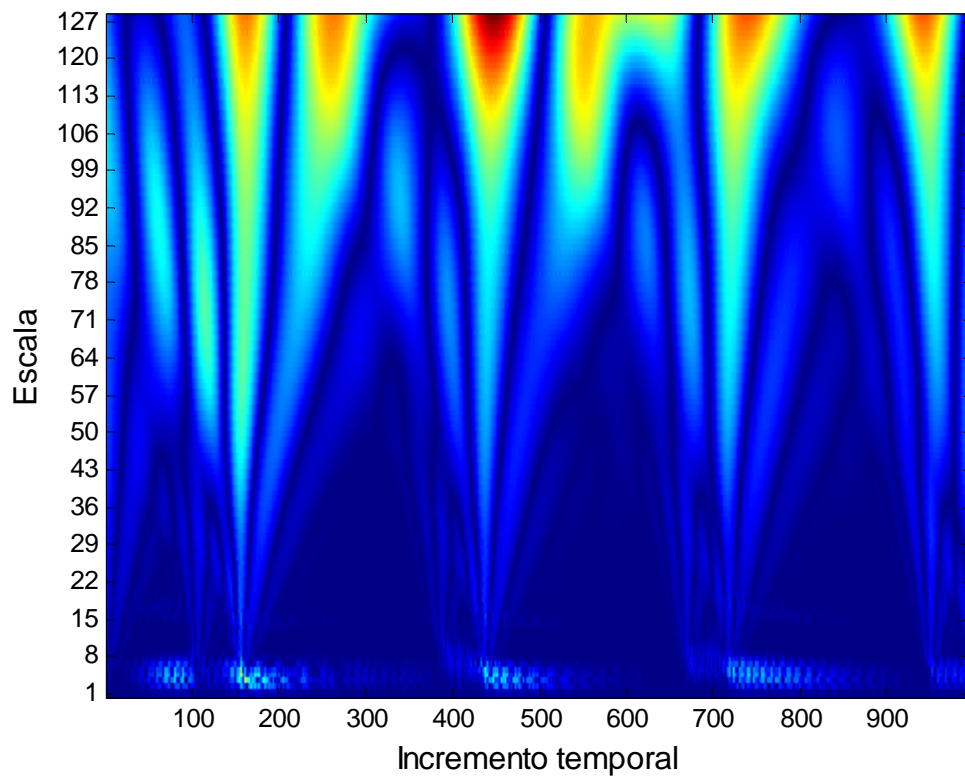


Figura 5.86. Wavelets para velocidad de rotación del rotor de 30 Hz (Modelo de 5 G.D.L.).

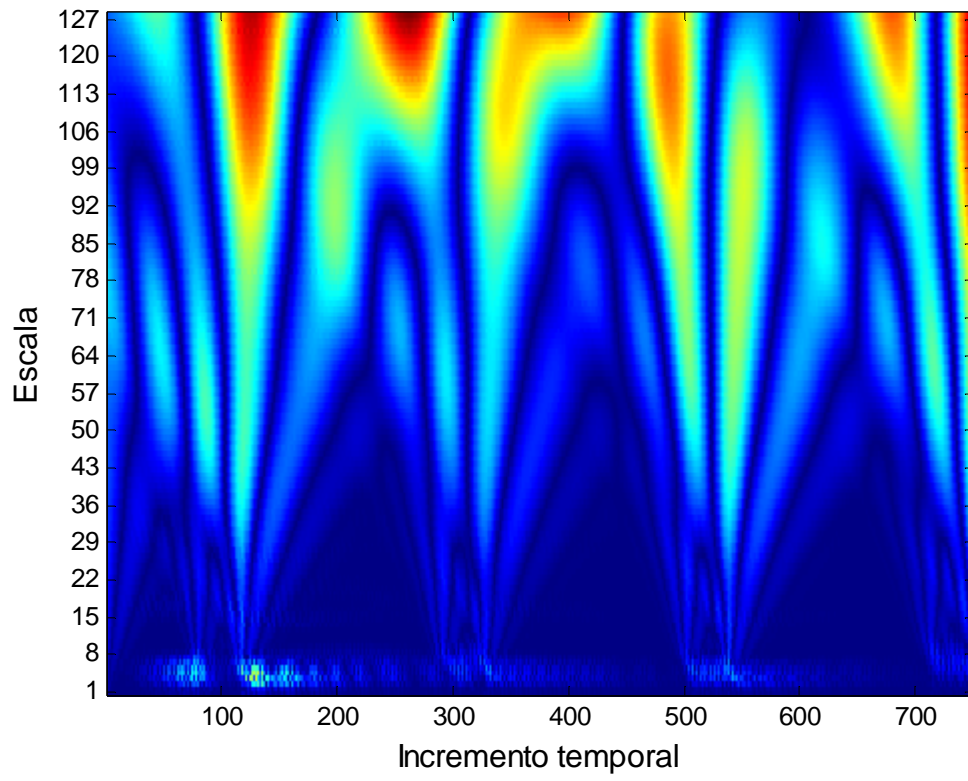


Figura 5.87. Wavelets para velocidad de rotación del rotor de 40 Hz (Modelo de 5 G.D.L.).

5.3.4 Comparación de señales a distintas velocidades de rotación: Modelo de 11 G.D.L.

Para el caso de los resultados para el modelo de 11 G.D.L, puede apreciarse que la tendencia de los resultados es muy similar a la que se podía ver en el caso de 5 G.D.L:

5.3.4.1 Defecto en pista interior

Las señales temporales siguen presentando la igualdad para las 4 velocidades de rotación en sus valores pico a pico que se describió en el apartado anterior y que quedó probado en las gráficas de tendencia de resultados: con el aumento de la velocidad no se obtiene variación apreciable del valor eficaz de la señal temporal de aceleración.

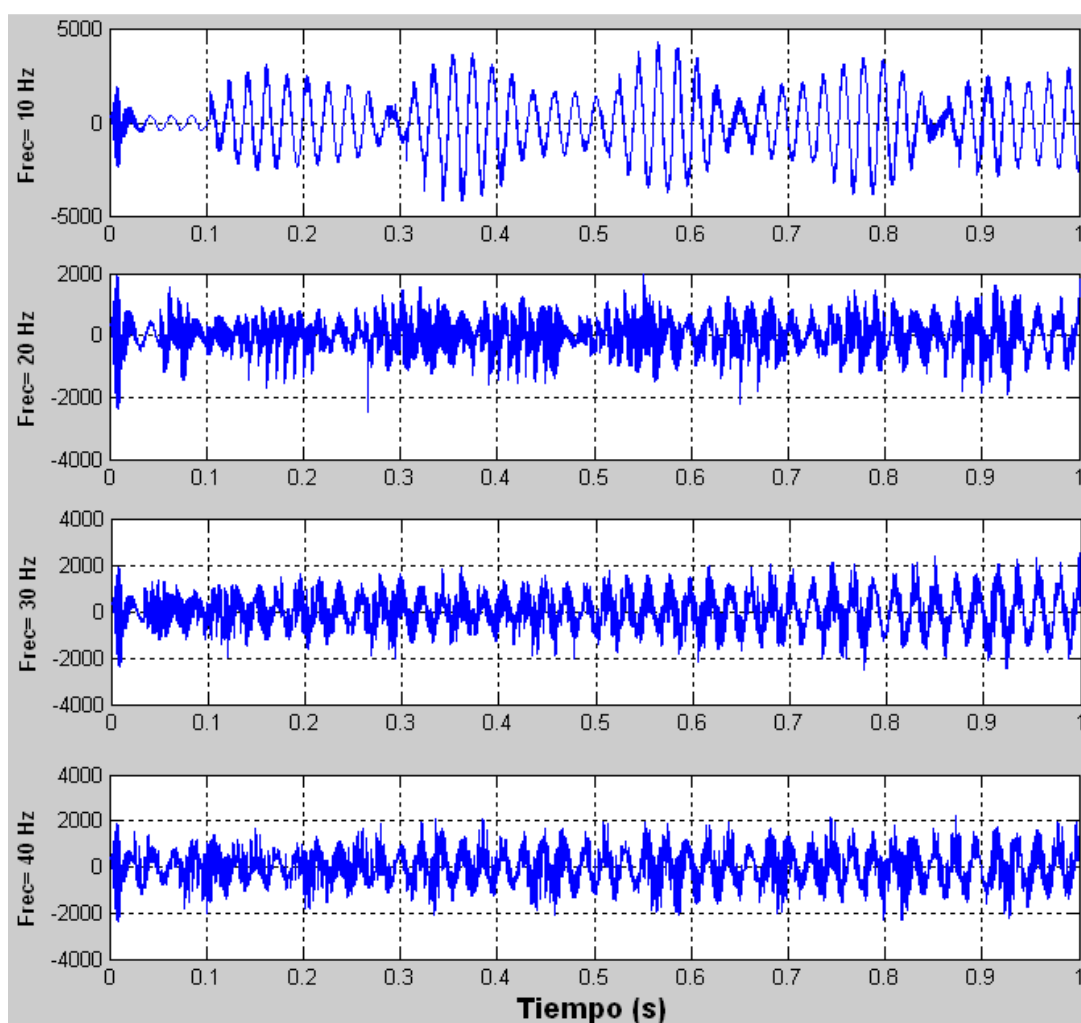


Figura 5.88. Señales de aceleración para diferentes velocidades de rotación del rotor. (Modelo de 11 G.D.L.)

Para los espectros de la señal temporal (situados entre los 1200- 2000 Hz), los picos asociados a las frecuencias de defecto en pista interior y exterior se hacen mayores con cada aumento de velocidad.

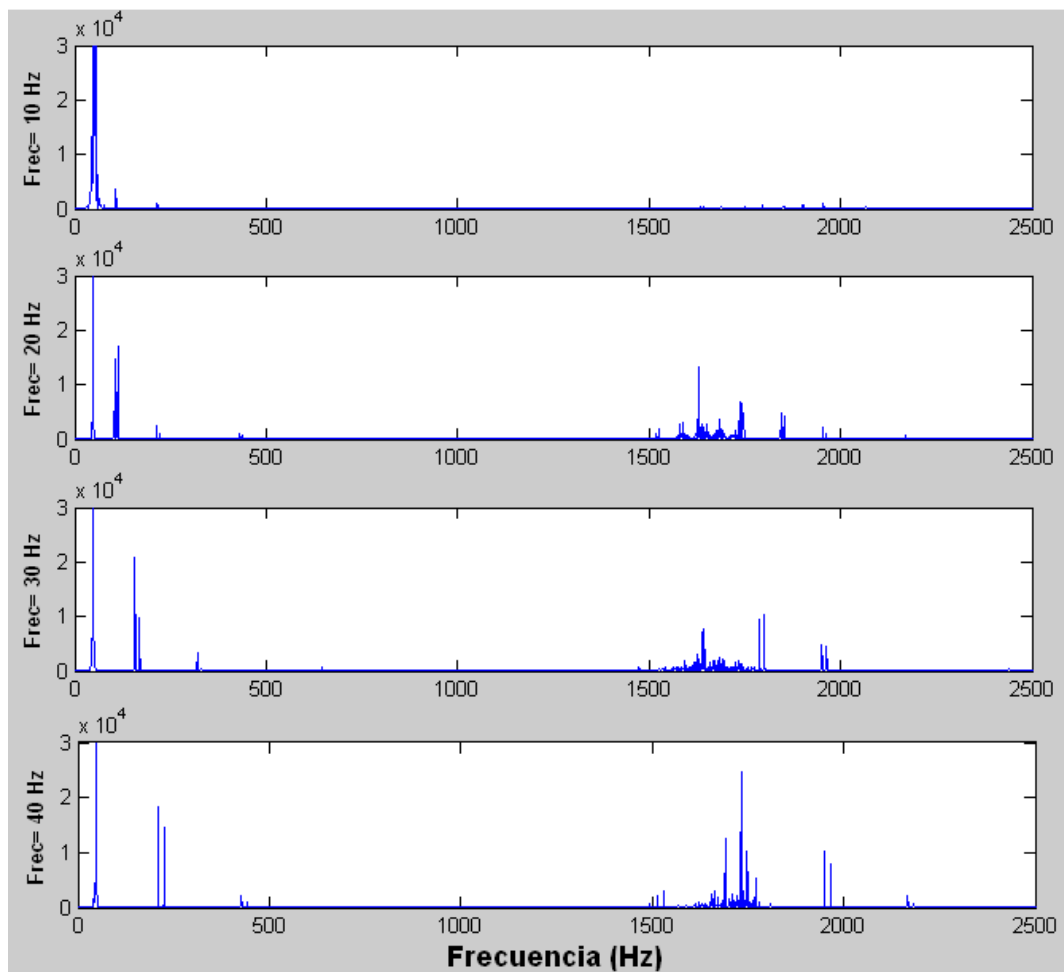


Figura 5.89. Espectros de la señal para diferentes velocidades de rotación del rotor. (Modelo de 11 G.D.L.)

Los espectros de la envolvente de la señal temporal presentan nuevamente la relación entre aumento de velocidad de rotación y posición frecuencial de las frecuencias de defecto y sus armónicos.

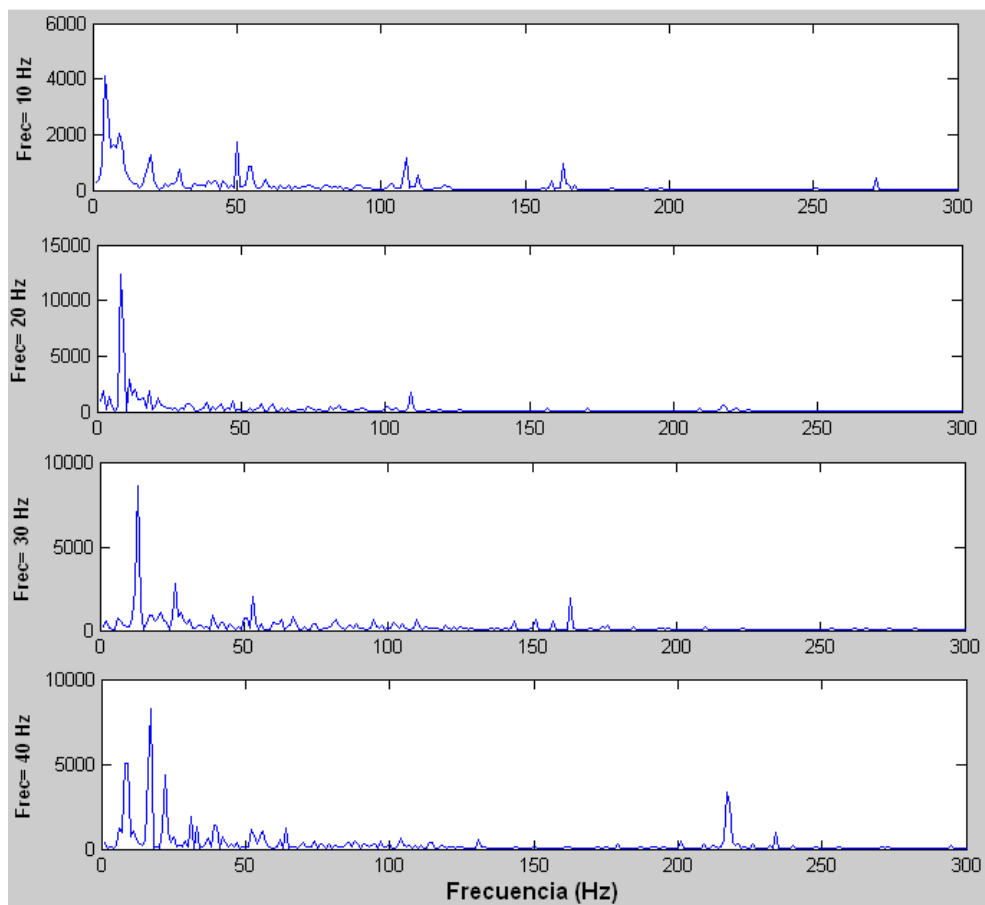


Figura 5.90. Espectros de la envolvente para diferentes velocidades de rotación del rotor. (Modelo de 11 G.D.L.)

En cuanto a las wavelet obtenidas, vuelve a apreciarse una mayor nitidez en las componentes de alta frecuencia a medida que aumentan las velocidades de rotación, así como la mayor influencia del defecto, señalada en rojo. También puede verse claramente la diferencia de número de elementos rodantes, materializada en el número de trazas a altas y medias escalas. Como en los casos anteriores, vuelve a emplearse la Wavelet Daubechies de orden 5.

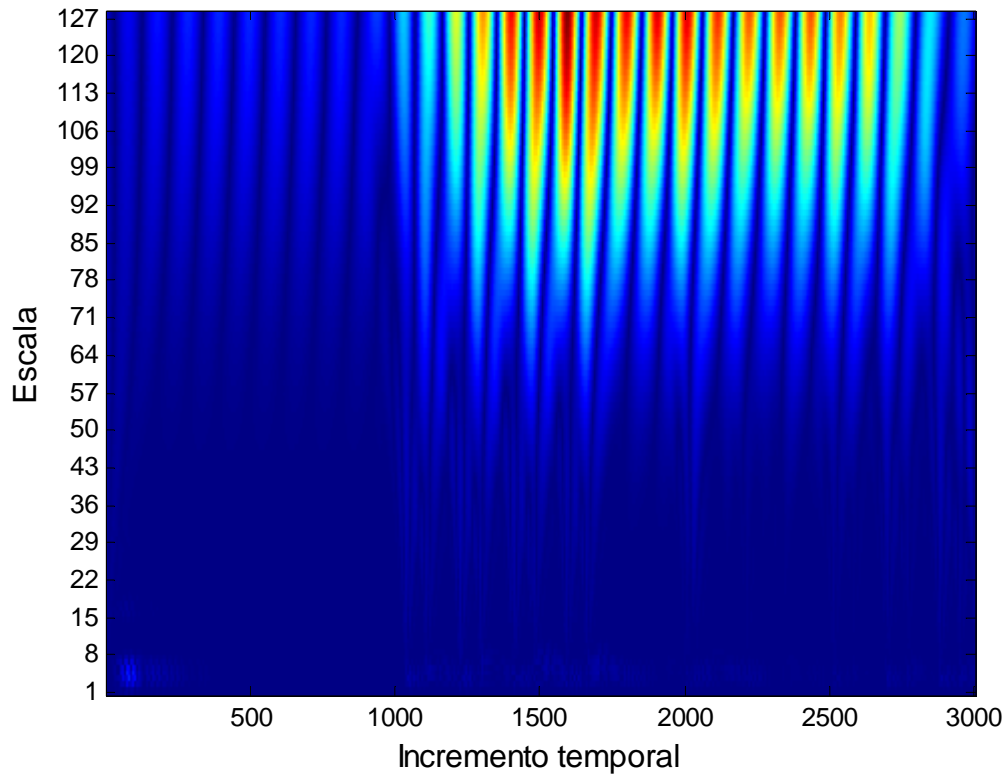


Figura 5.91. Wavelets para velocidad de rotación del rotor de 10 Hz (Modelo de 11 G.D.L.).

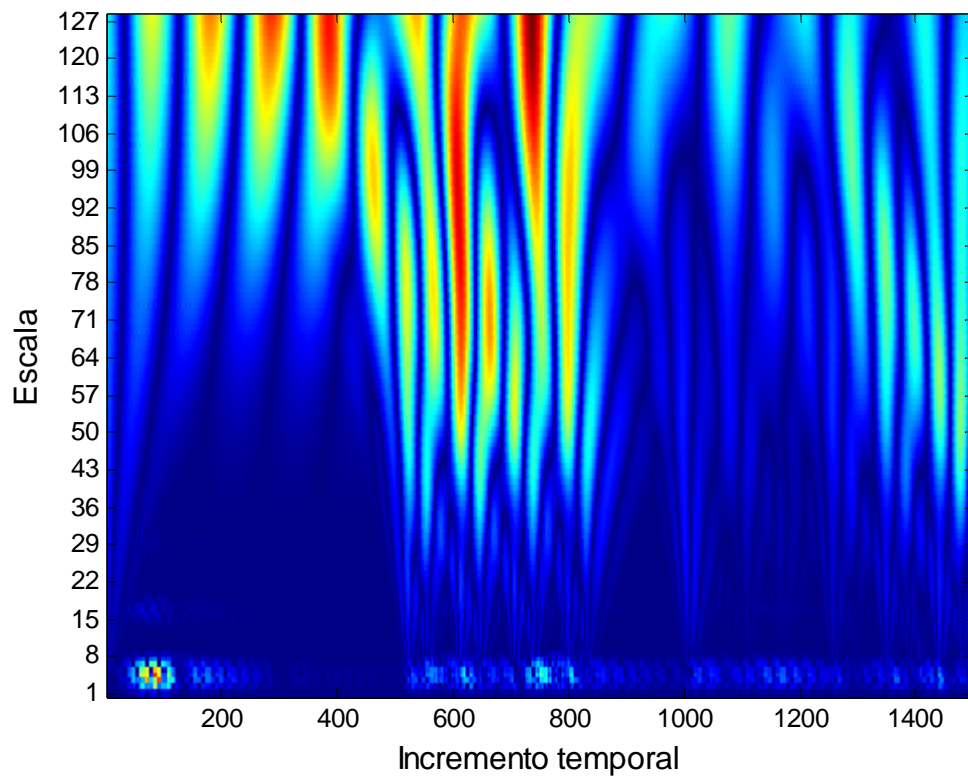


Figura 5.92. Wavelets para velocidad de rotación del rotor de 20 Hz (Modelo de 11 G.D.L.).

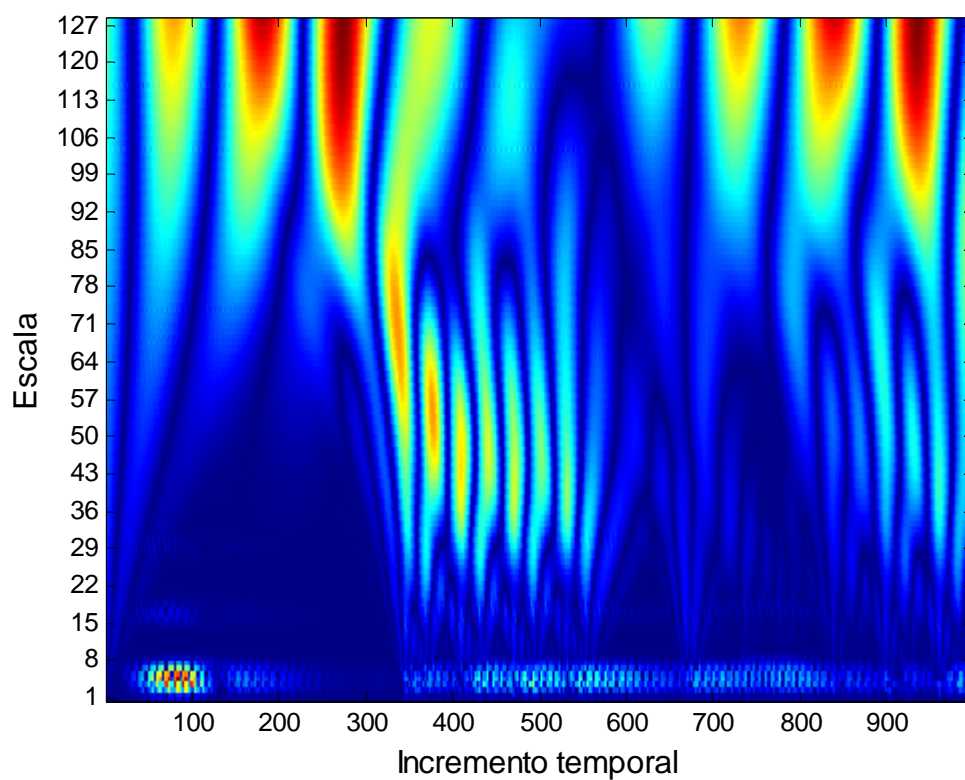


Figura 5.93. Wavelets para velocidad de rotación del rotor de 30 Hz (Modelo de 11 G.D.L.).

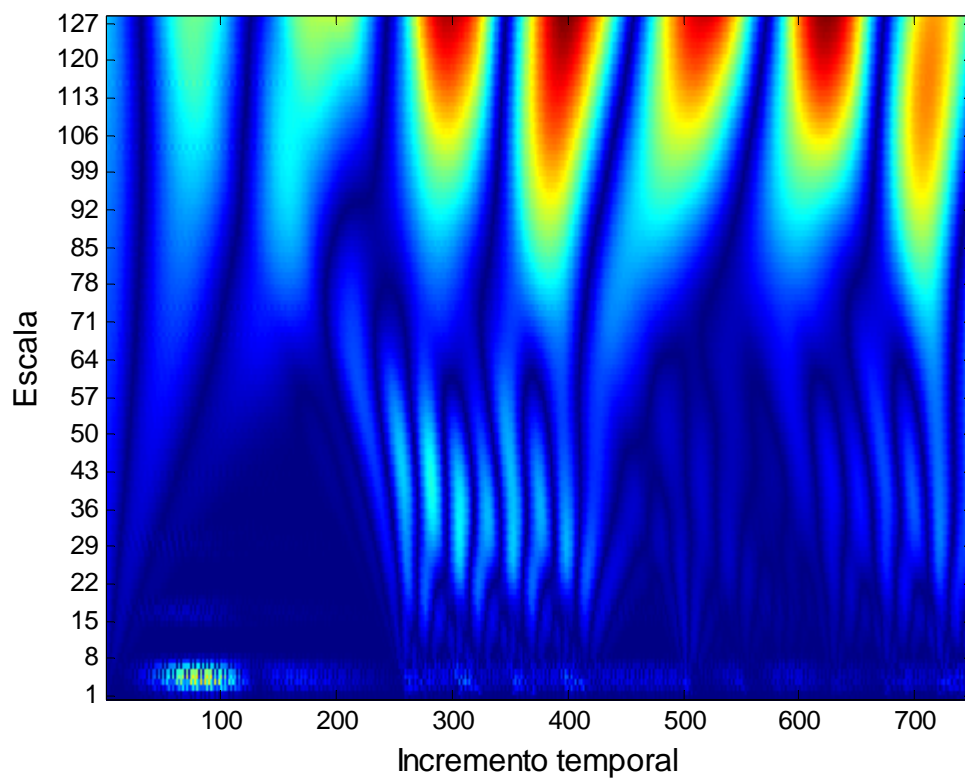


Figura 5.94. Wavelets para velocidad de rotación del rotor de 40 Hz (Modelo de 11 G.D.L.).

5.3.4.2 Defecto en pista exterior

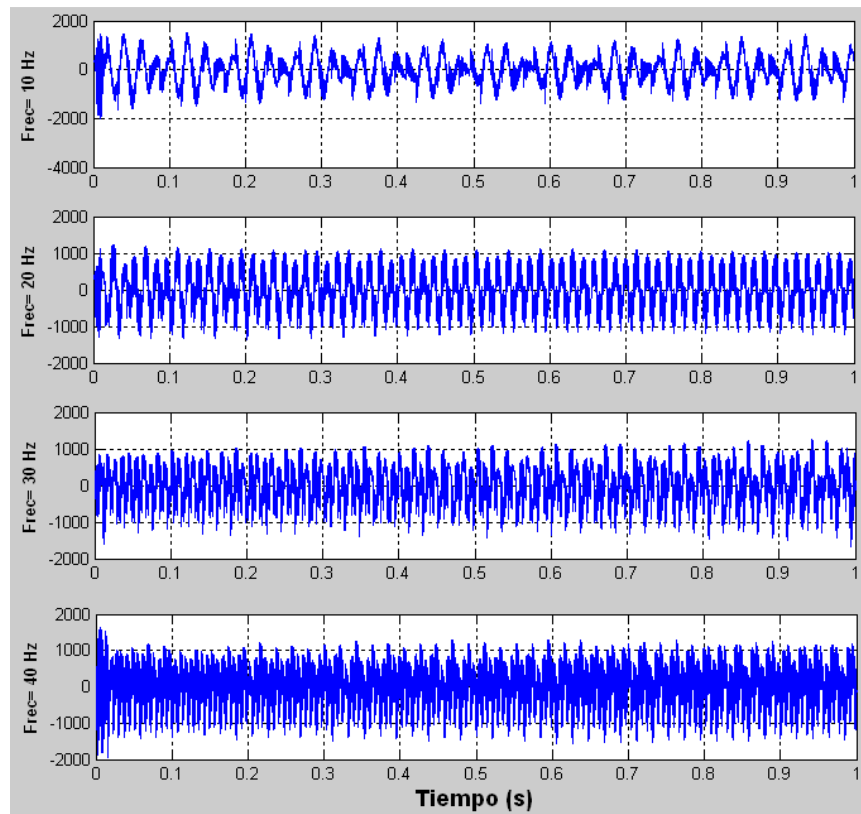


Figura 5.95. Señales de aceleración para diferentes velocidades de rotación del rotor. (Modelo de 11 G.D.L.)

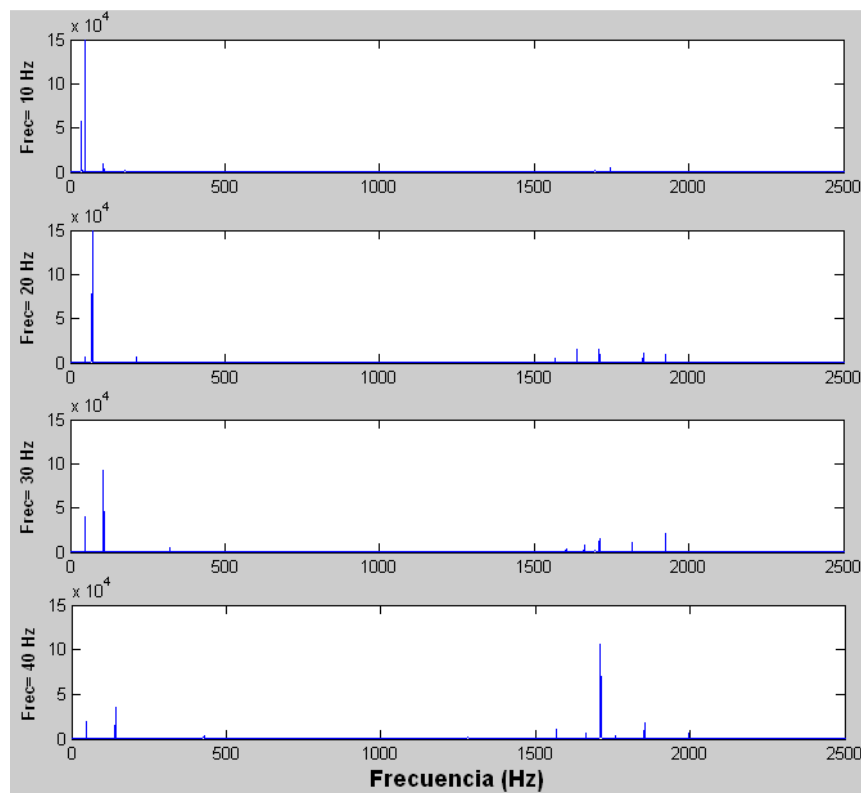


Figura 5.96. Espectros de la señal para diferentes velocidades de rotación del rotor. (Modelo de 11 G.D.L.)

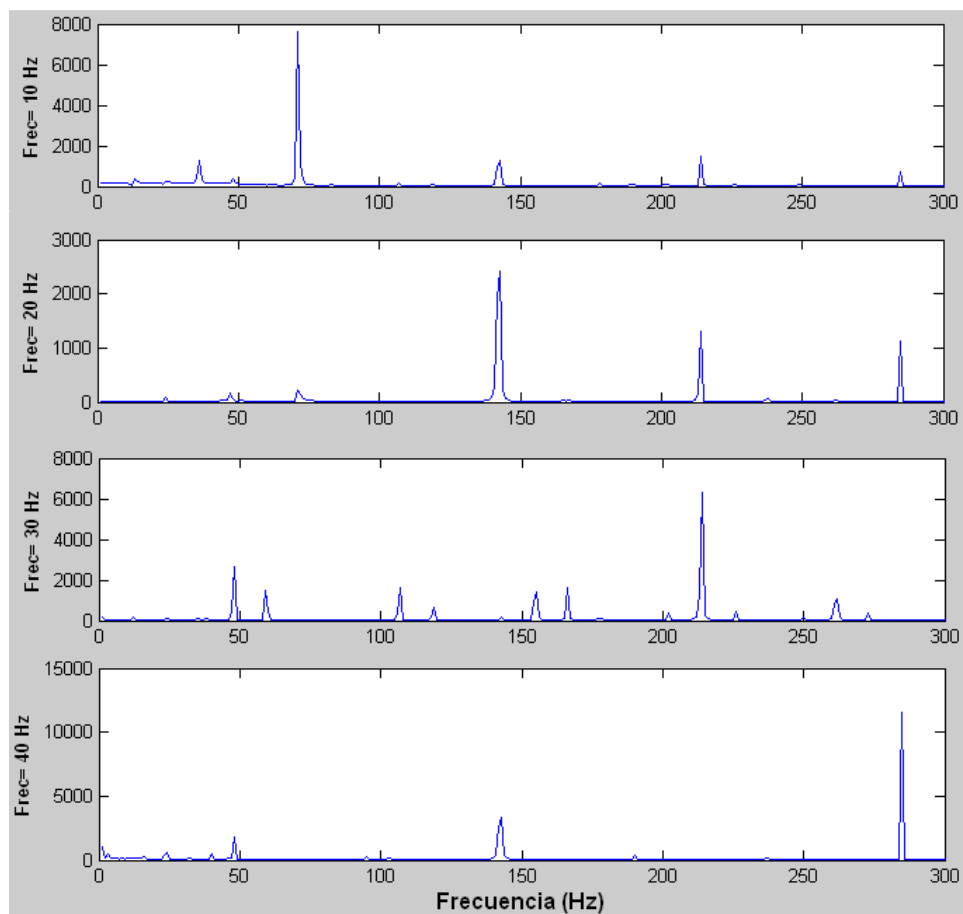


Figura 5.97. Espectros de la envolvente para diferentes velocidades de rotación del rotor. (Modelo de 11 G.D.L.)

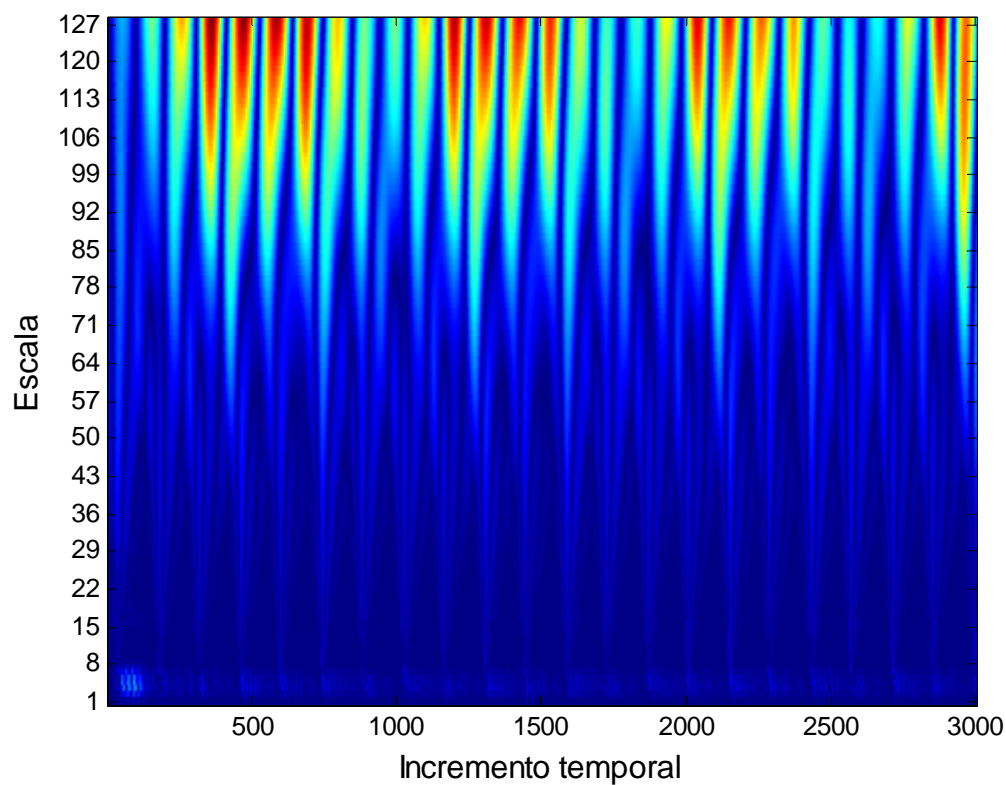


Figura 5.98. Wavelets para velocidad de rotación del rotor de 10 Hz (Modelo de 11 G.D.L.).

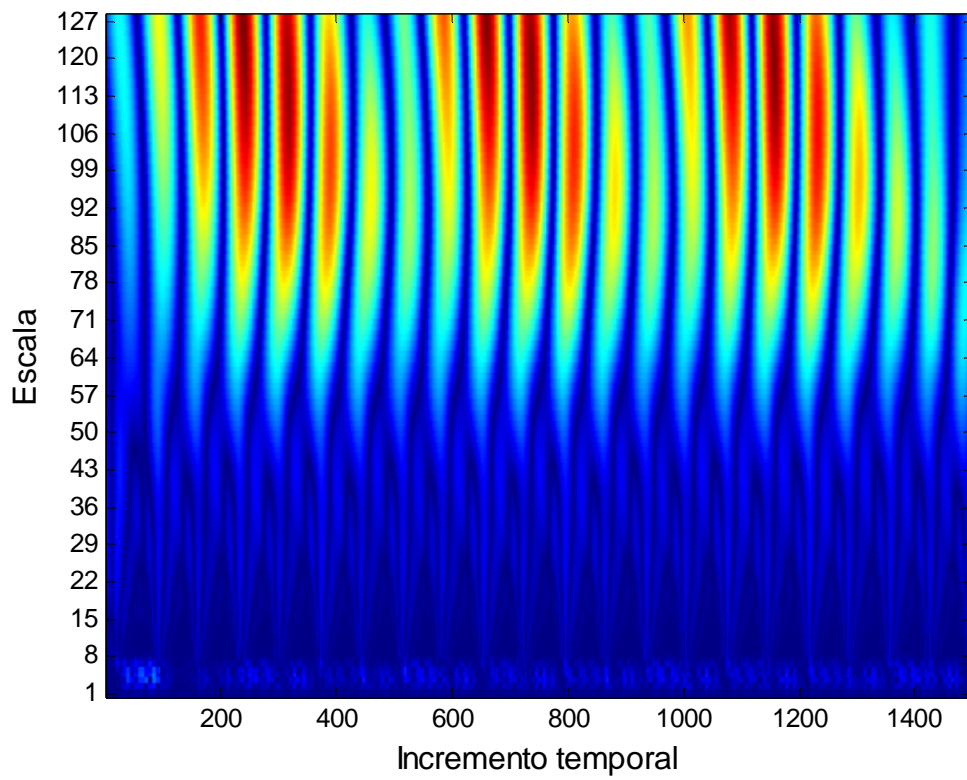


Figura 5.99. Wavelets para velocidad de rotación del rotor de 20 Hz (Modelo de 11 G.D.L.).

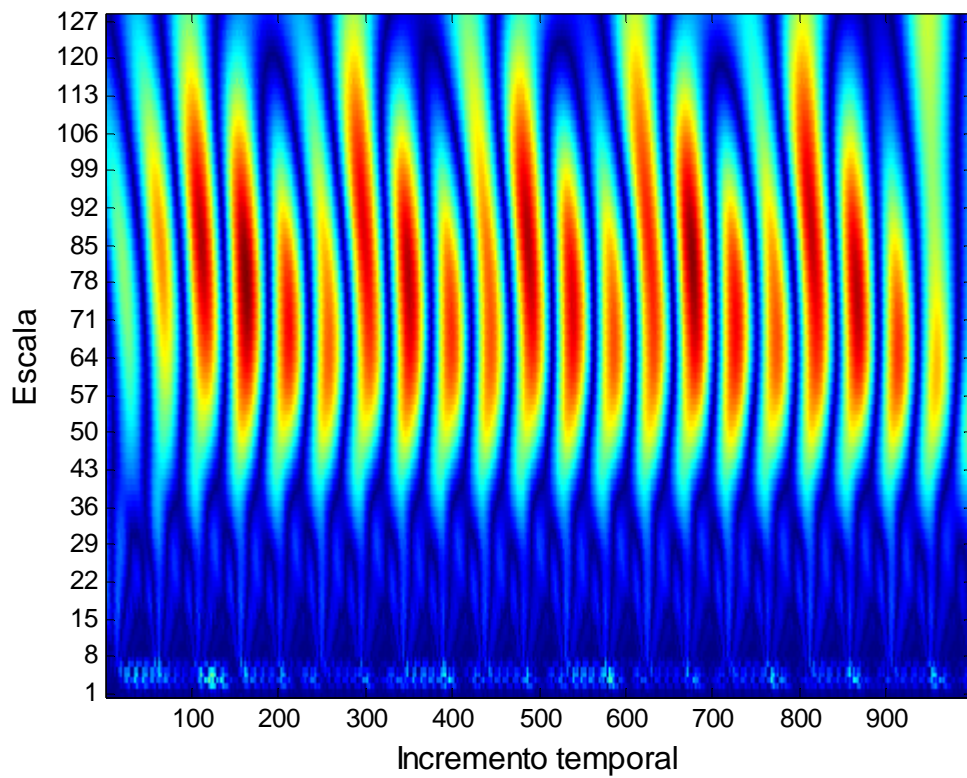


Figura 5.100. Wavelets para velocidad de rotación del rotor de 30 Hz (Modelo de 11 G.D.L.).

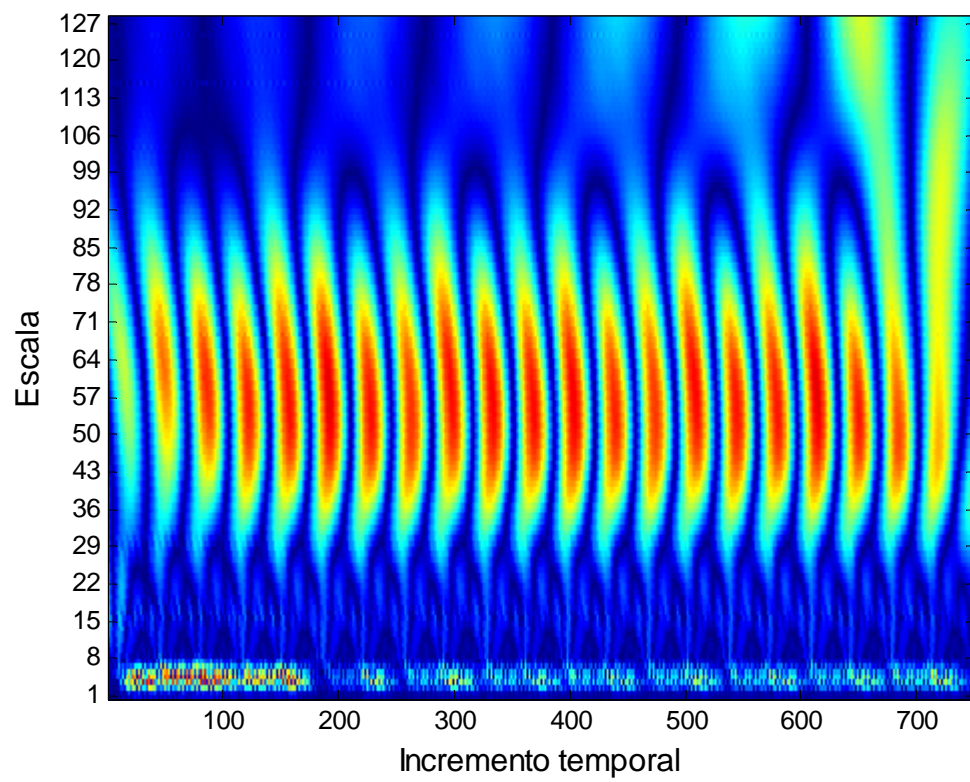


Figura 5.101. Wavelets para velocidad de rotación del rotor de 40 Hz (Modelo de 11 G.D.L.).

Capítulo 6

Programa SIMROD

6.1 Manual de uso de SIMROD

El capítulo anterior comentaba el entorno visual creado para la utilización del programa, pero se hace necesario realizar un análisis más en profundidad de las posibilidades del programa. Ciertamente el programa es bastante intuitivo, y los caminos a seguir, especialmente en la primera fase del programa no son muy amplios, pero para cualquier programa es importante crear una guía rápida.

SIMROD es un programa creado en soporte Matlab-Simulink-GUI, diseñado para realizar la simulación de los modelos de rodamientos desarrollados en este proyecto. Permite realizar simulaciones de rodamientos con elementos rodantes tipo bola y rodillo, incluyendo si se desea un defecto de tipo escalón en las pistas interior o exterior del rodamiento, y definiendo las condiciones de funcionamiento del sistema.

Una vez llevada a cabo la simulación, el programa ofrece opciones de visualización, tratamiento y análisis de resultados, entre los que se encuentran el análisis de espectros de la señal, espectros de envolventes, análisis wavelet, obtención de valores estadísticos...

Finalmente, se ofrece la posibilidad de guardar los resultados obtenidos en la simulación no sólo en un formato reconocible por Matlab, sino también en un formato universal como es el *.txt*.

6.1.1: Introducción de datos

Un aspecto importante es el fraccionamiento del programa de introducción de datos, *datos.m*, dividido entre las distintas pantallas usadas para introducir las características del rodamiento y de funcionamiento del modelo, con lo cual, para cada conjunto de datos existe una pantalla específica para su definición.

A continuación, se muestran los diagramas de flujo que representan las diferentes pantallas que se pueden encontrar. Por comodidad, se han dividido el programa completo en varios subdiagramas, el primero de los cuales corresponde a la introducción de parámetros y simulación.

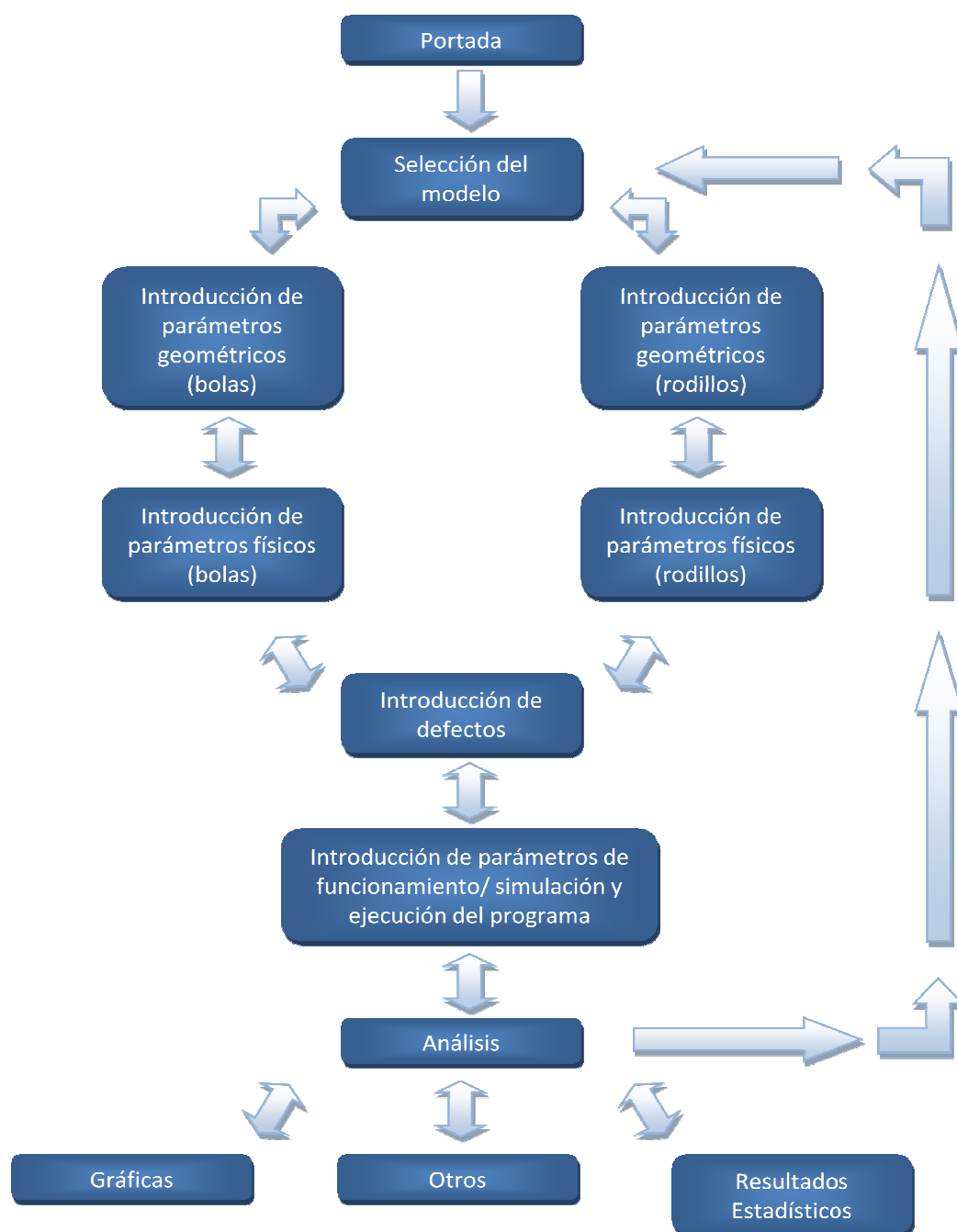


Figura 6.1. Diagrama de introducción de datos y pantallas de análisis.

Para iniciar el programa, debe abrirse primero el programa Matlab. Una vez abierto, se busca el directorio en el cual están situados los archivos del programa, que aparecerán en la ventana Current Directory. Una vez situados en el directorio, se ha de escribir la orden PORTADA_1 en el Command Window, que mostrará la portada de la figura 6.2. Pulsando en el botón continuar, se pasa a la pantalla de Selección de Modelo.



Figura 6.2. Pantalla que muestra la portada del programa SIMROD.

6.1.1.1 Pantalla de selección de modelo.

En primer lugar, debe seleccionarse el tipo de elemento rodante: bolas o rodillos. Esta elección marcará únicamente la variación de las constantes de rigidez y la masa de los elementos rodantes, ya que el funcionamiento del sistema es exactamente el mismo.

A continuación, se elige el modelo de simulación:

- Modelo de 5 G.D.L. de Newton.
- Modelo de 11 G.D.L. de Newton.
- Modelo de 5 G.D.L. de Lagrange.
- Modelo de 5 G.D.L. de Lagrange.

Al hacer click en cualquiera de los modelos, se pasa a la pantalla de datos geométricos (Figura 6.3).



Figura 6.3. Pantalla de selección de modelo de simulación y tipo de elemento.

6.1.1.2 Pantalla de datos geométricos

En esta pantalla encontramos los datos correspondientes a las dimensiones y masas de los elementos del rodamiento. Dependiendo del tipo de elemento rodante que se haya seleccionado, se accede a un tipo de pantalla diferente. En cada una de ellas hay varios parámetros editables (independientes) y otros que son consecuencia de ellos.

Por defecto las medidas que se encuentran por defecto son las relativas al rodamiento SKF 6206, y cualquier variación de los parámetros independientes se realiza en función de ellos:

Parámetros independientes: Elemento rodante tipo bola (Figura 6.4)

- Diámetro medio del rodamiento.
- Diámetro de la bola
- Masa del rotor

Parámetros independientes: Elemento rodante tipo rodillo (Figura 6.5)

- Diámetro medio del rodamiento.
- Diámetro del rodillo
- Longitud del rodillo
- Masa del rotor

Los parámetros que dependen de los independientes pueden ser actualizados pulsando en el botón “Actualizar” y son los siguientes:

- Diámetro de pista exterior.
- Diámetro de pista interior.
- Masa de pista exterior.
- Masa de pista interior.
- Masa de los elementos rodantes.

PARÁMETROS FÍSICOS DEL RODAMIENTO

Diagrama de un elemento rodante tipo rodillo con las siguientes dimensiones etiquetadas:

- Diámetro bola
- Diámetro pista interior
- Diámetro medio
- Diámetro pista exterior

Parámetros independientes

Diámetro medio (mm)	46
Diámetro de bola (mm)	9.5
Masa del rotor (kg)	5

Parámetros dependientes

Diámetro de pista externa (mm)	55.5
Diámetro de pista interna (mm)	36.5
Masa pista exterior del rodamiento (kg)	0.075
Masa pista interior del rodamiento (kg)	0.061
Masa bola (kg)	0.0035

Botones de control: Salir, Atrás, Continuar, Actualizar

Figura 6.4. Pantalla de introducción de datos geométricos para elementos tipo bola.

PARÁMETROS FÍSICOS DEL RODAMIENTO

Parámetros independientes

Diámetro medio (mm)	46
Diámetro de cilindro (mm)	9.5
Longitud de cilindro (mm)	12
Masa del rotor (kg)	5

Parámetros dependientes

Diámetro de pista externa (mm)	55.5
Diámetro de pista interna (mm)	36.5
Masa pista exterior del rodamiento (kg)	0.075
Masa pista interior del rodamiento (kg)	0.061
Masa cilindro (kg)	0.0035

Botones: Salir, Atrás, Continuar, Actualizar

Figura 6.5. Pantalla de introducción de datos geométricos para elementos tipo rodillo.

6.1.1.3 Pantalla de datos físicos

La ventana de parámetros físicos permite editar las constantes de rigidez y de amortiguamiento. Las opciones de esta pantalla son la posibilidad de elegir las constantes de rigidez y amortiguamiento predeterminadas que corresponden a las del rodamiento 6206 (las constantes de rigidez dependen de los parámetros geométricos), o introducirlas según la preferencia del usuario. A partir de esta pantalla se terminan las distinciones en lo que a tipos de elementos rodantes se refiere.

Para elementos rodantes del tipo bola (Figura 6.6)

- Constante de rigidez interior (elemento- pista interior).
- Constante de rigidez exterior (elemento- pista exterior).
- Constante de amortiguamiento.

En el caso de elementos tipo rodillo, sólo puede elegirse el único valor de la constante (Figura 6.7)

- Constante de rigidez.
- Constante de amortiguamiento.

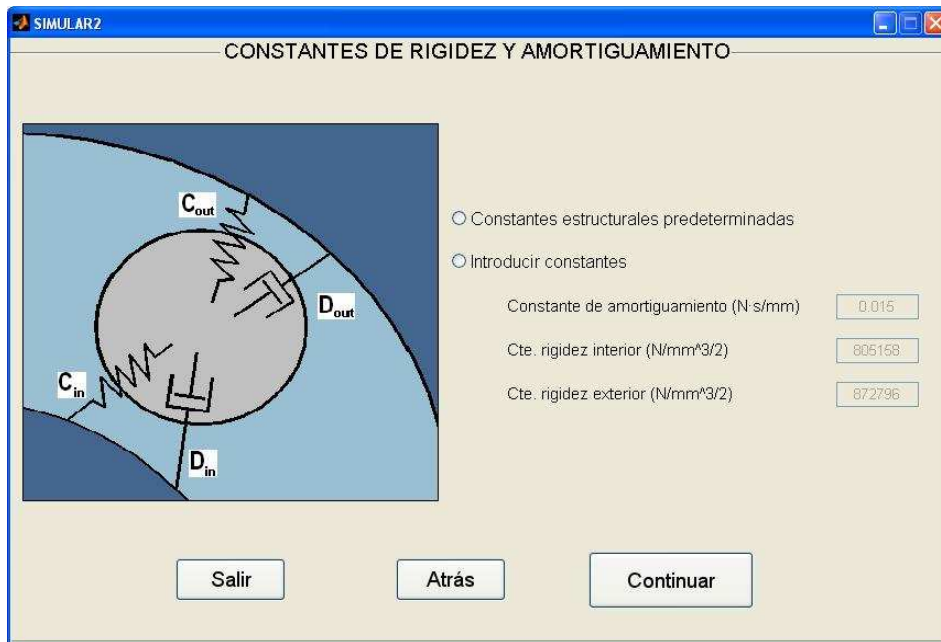


Figura 6.6. Pantalla de introducción de constantes de rigidez y amortiguamientos para elementos rodantes del tipo bola.

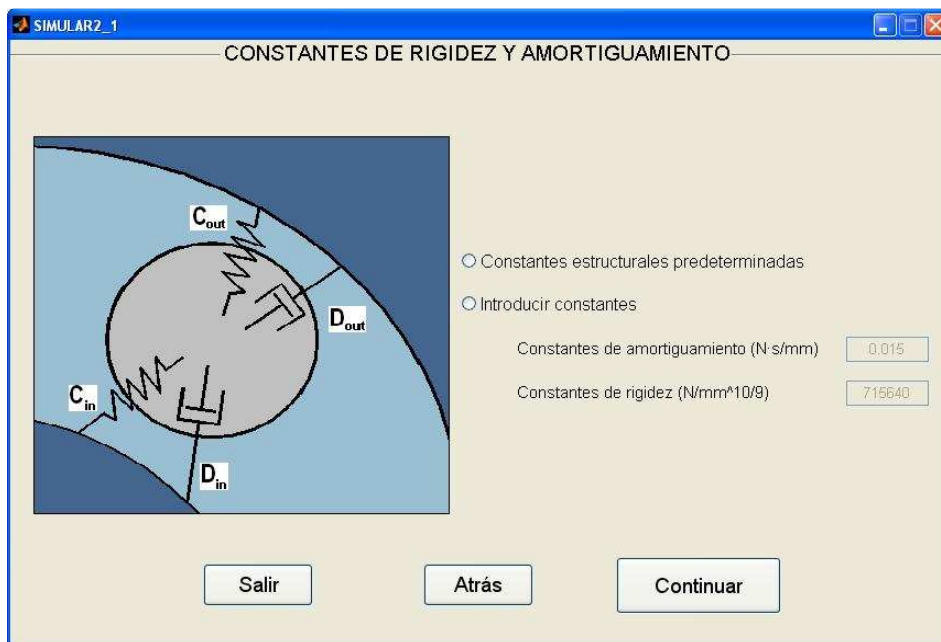


Figura 6.7. Pantalla de introducción de constantes de rigidez y amortiguamientos para elementos rodantes del tipo rodillo.

6.1.1.4 Pantalla de definición defectos

La pantalla de introducción de defectos permite 3 opciones:

- Rodamiento sin defecto (Figura 6.8).
- Rodamiento con defecto en pista interna (Figura 6.9).
- Rodamiento con pista externa (Figura 6.10).

CAPÍTULO 6: PROGRAMA SIMROD

Para los casos de introducción del defecto, las dimensiones del mismo están limitadas por cuestiones de umbrales de utilización del programa, pudiéndose seleccionar mediante un control deslizante. Defectos muy profundos provocarían fuerzas de contacto excesivas, por lo que la limitación se hace necesaria.



Figura 6.8. Pantalla para definición de defectos (caso sin defecto).

Para el defecto en pista interior:

- Ángulo abarcado por el defecto (°).
- Profundidad del defecto (mm).

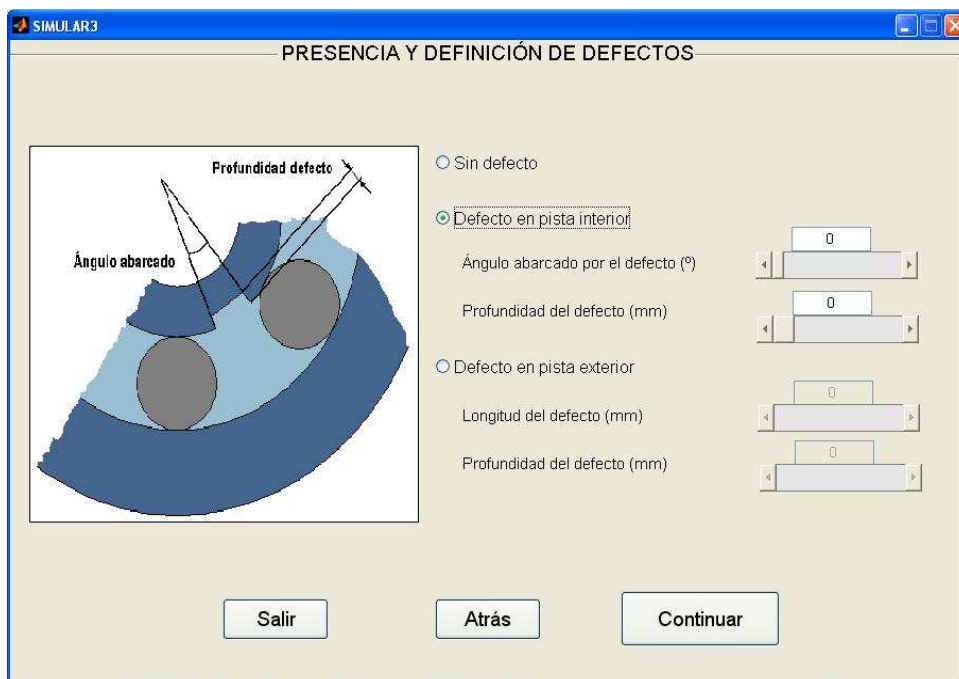


Figura 6.9. Pantalla para definición de defectos (caso defecto en pista interior).

Para el defecto en pista exterior.

- Longitud del defecto (mm).
- Profundidad del defecto (mm).

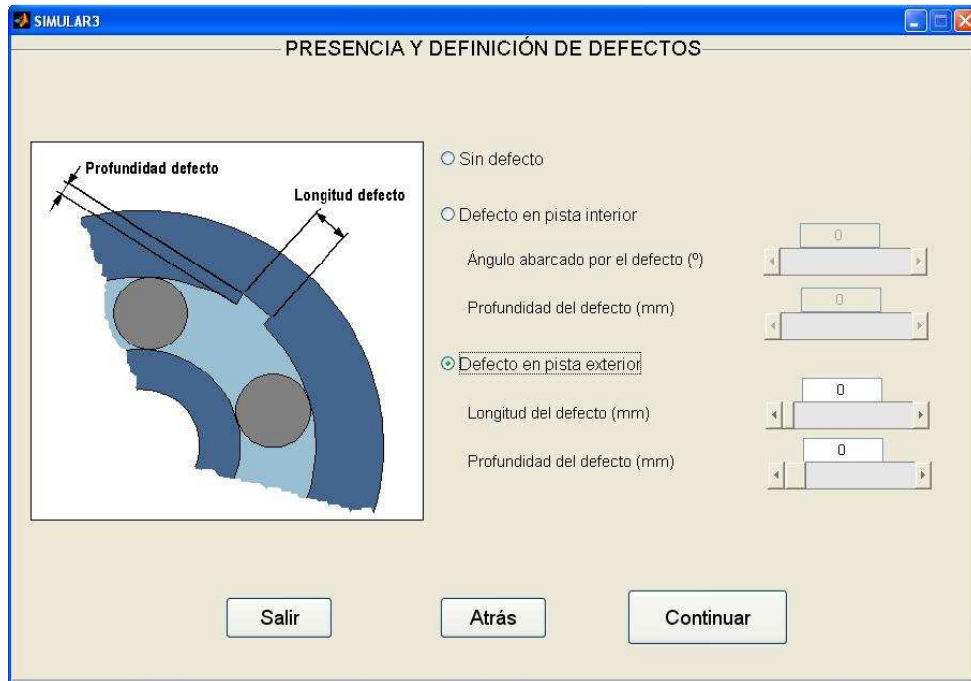


Figura 6.10. Pantalla para definición de defectos (caso defecto en pista exterior).

6.1.1.5 Pantalla de datos de funcionamiento

Los datos de funcionamiento se combinan en esta pantalla con los datos de simulación del programa (Figura 6.11).

- Velocidad de rotación del rotor.
- Fuerza exterior en dirección X.
- Fuerza exterior en dirección Y.
- Fuerza de desequilibrio del rotor.
- Frecuencia de muestreo.
- Tiempo de simulación.

Con todos los datos introducidos, puede dar comienzo la simulación, tras lo cual, y de forma automática, emergerá la pantalla de “Análisis de resultados”.

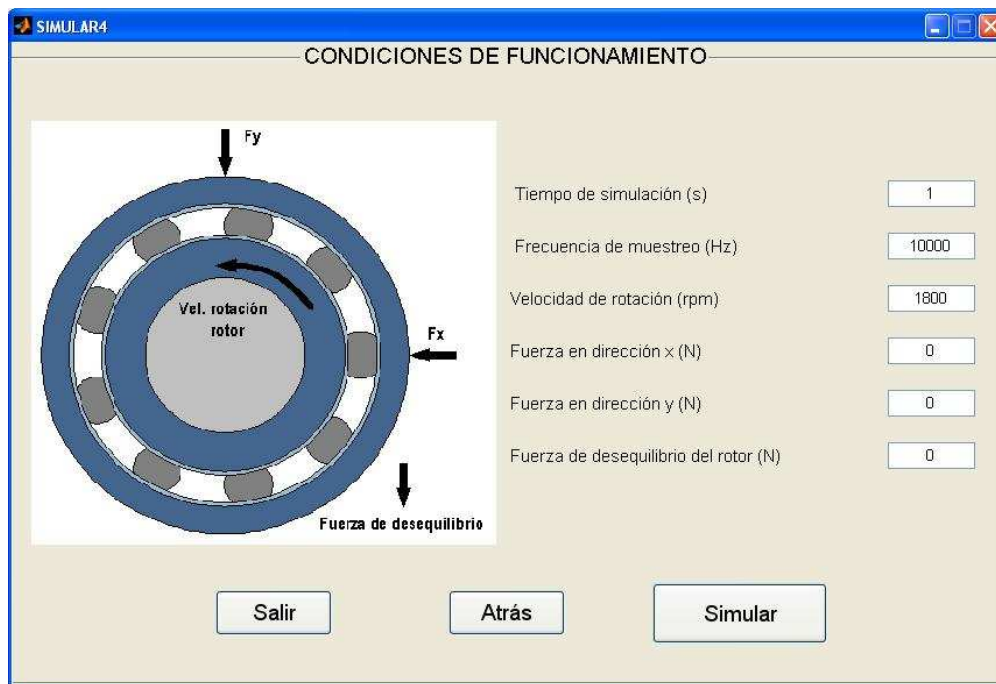


Figura 6.11. Pantalla para introducción de datos de funcionamiento y simulación.

6.1.2 Análisis de resultados

La pantalla “Análisis de resultados” (Figura 6.12) muestra 3 opciones

- Gráficas de resultados.
- Otras gráficas (Análisis frecuencial)
- Resultados estadísticos

Esta pantalla emerge tras la finalización de la simulación, y es en ella en la cual se crean de forma inmediata al entrar los archivos *.txt* en los que se guardan los resultados que se han obtenido. Una vez se ha completado el proceso, puede comenzarse a utilizar las opciones de las que dispone.

También es importante decir que esta pantalla nunca se cierra. Es decir, el resto de pantallas se cierra una vez se han seleccionado las opciones deseadas y se avanza mediante los botones “Continuar”, pero esta pantalla, al ser la base de la cual parten las opciones de análisis, se mantiene siempre a no ser que el usuario decida cerrarla, pulsando en la “X” superior derecha, o en el botón “Salir”.

En el caso de querer realizar otra simulación, el botón “Nuevo modelo” abre la ventana de “Selección del modelo”, con lo que vuelve a iniciarse el proceso.



Figura 6.12. Pantalla de opciones para el análisis de resultados.

6.1.2.1 Gráficas de resultados

Las gráficas de resultados no son más que las representaciones que se obtienen en los bloques Scope de los programas Simulink. La opción más novedosa es la de poder elegir la visualización uno a uno de los elementos, además del sumatorio de fuerzas en su correspondiente apartado y la evolución conjunta de la posición del C.A.I. en las coordenadas X e Y. Las opciones elegibles son:

- Posiciones del C.A.I. (Coordenadas x e y)
- Velocidades del C.A.I. (Coordenadas x e y)
- Aceleraciones del C.A.I. (Coordenadas x e y)
- Deformaciones de los elementos rodantes.
- Fuerzas de contacto elemento rodante-pista de rodadura.
- Posición radial de los elementos rodantes.
- Velocidad radial de los elementos rodantes.
- Aceleración radial de los elementos rodantes.

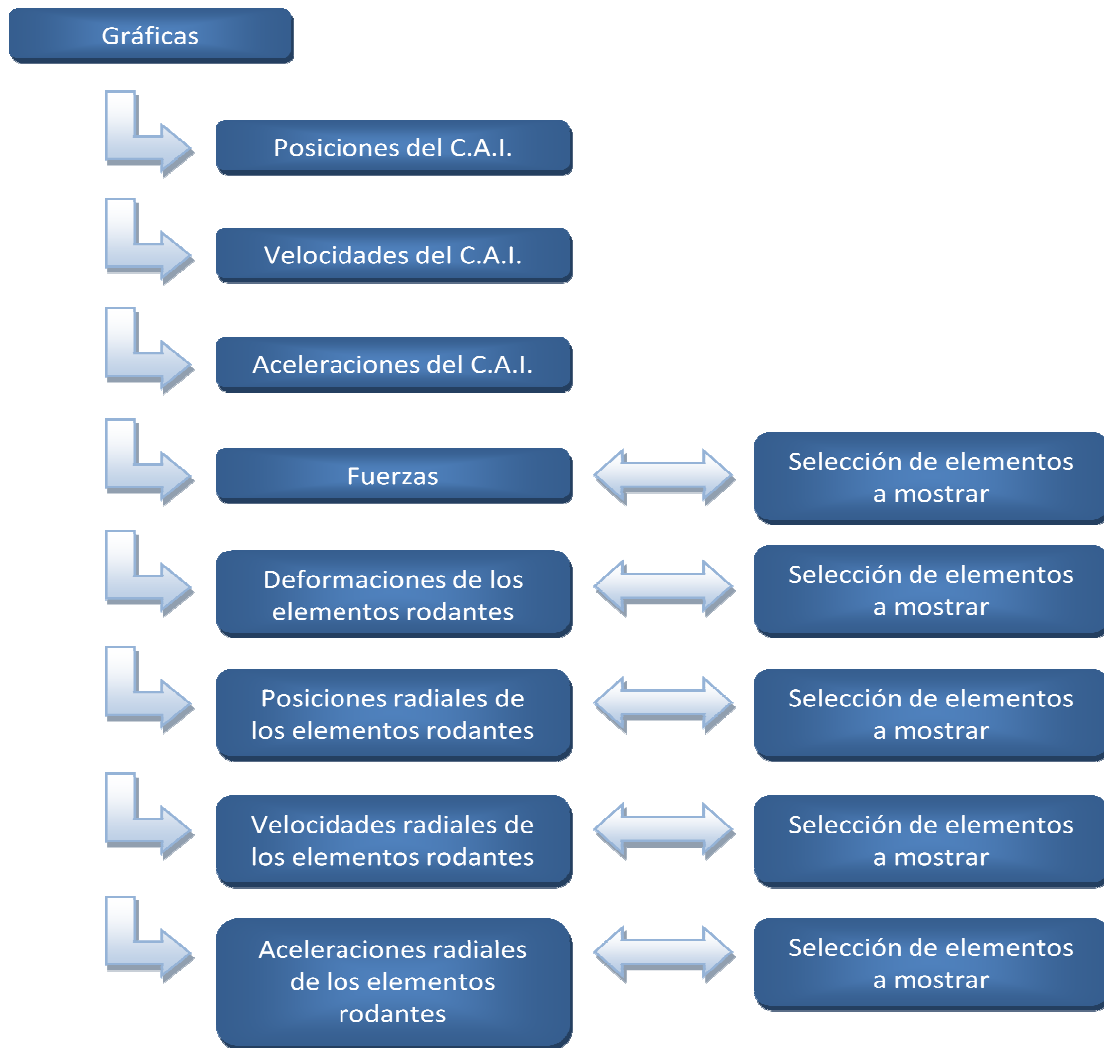


Figura 6.13. Diagrama de opciones del apartado "Gráficas"

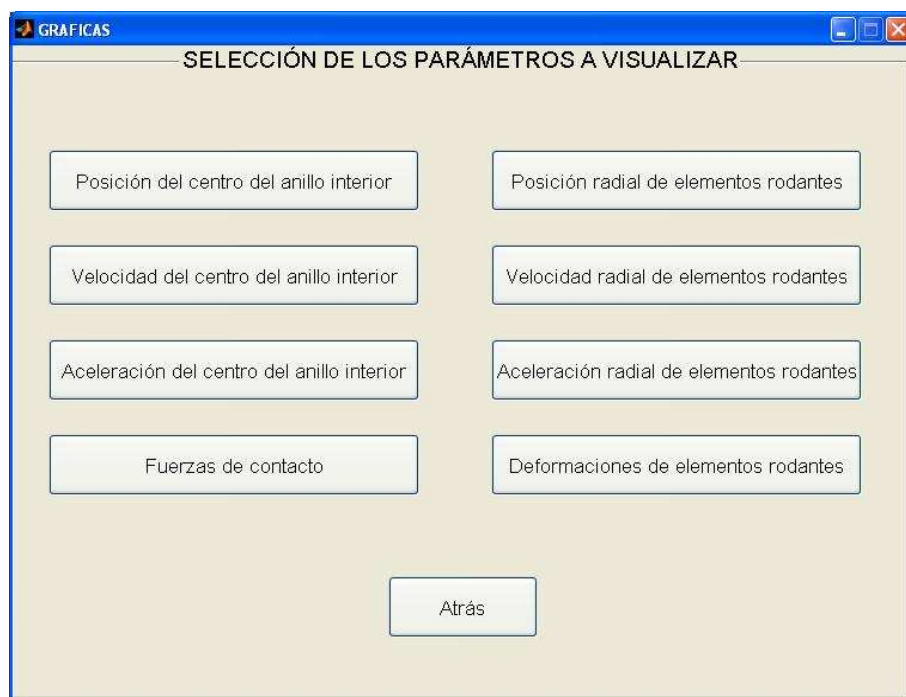


Figura 6.14. Pantalla de selección de parámetros para su visualización.

Al pulsar cualquiera de estos botones, se abre una nueva pantalla, que muestra los cuadros que se muestran a continuación. Dentro de ellos, se seleccionan una o varias opciones, mostrándose las gráficas correspondientes. Las figuras de la 6.15 a la 6.24 muestran las diferentes pantallas a las que se puede acceder, dependiendo del número de elementos rodantes y del parámetro elegido.

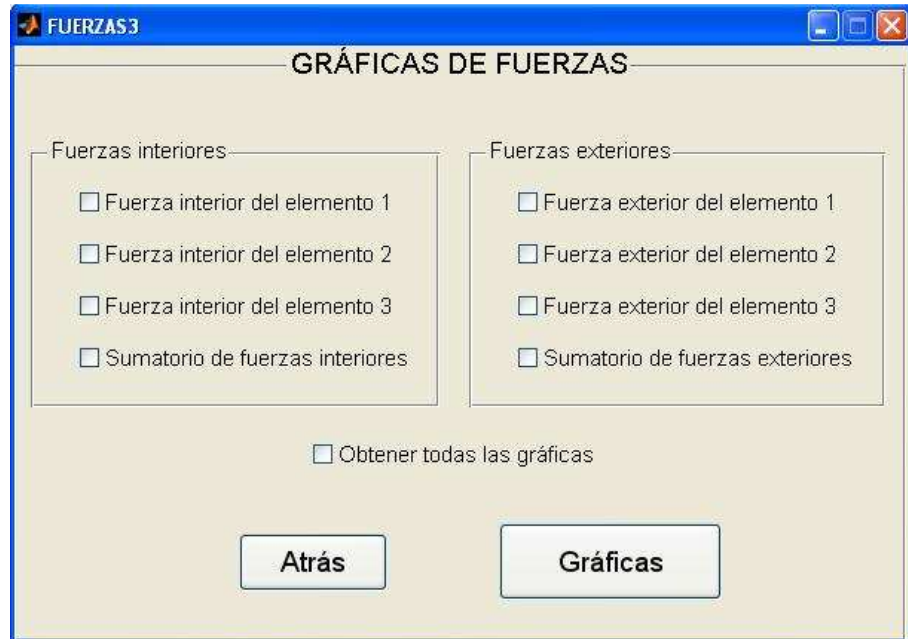


Figura 6.15. Pantalla de visualización de fuerzas por elemento rodante (3 elementos rodantes).

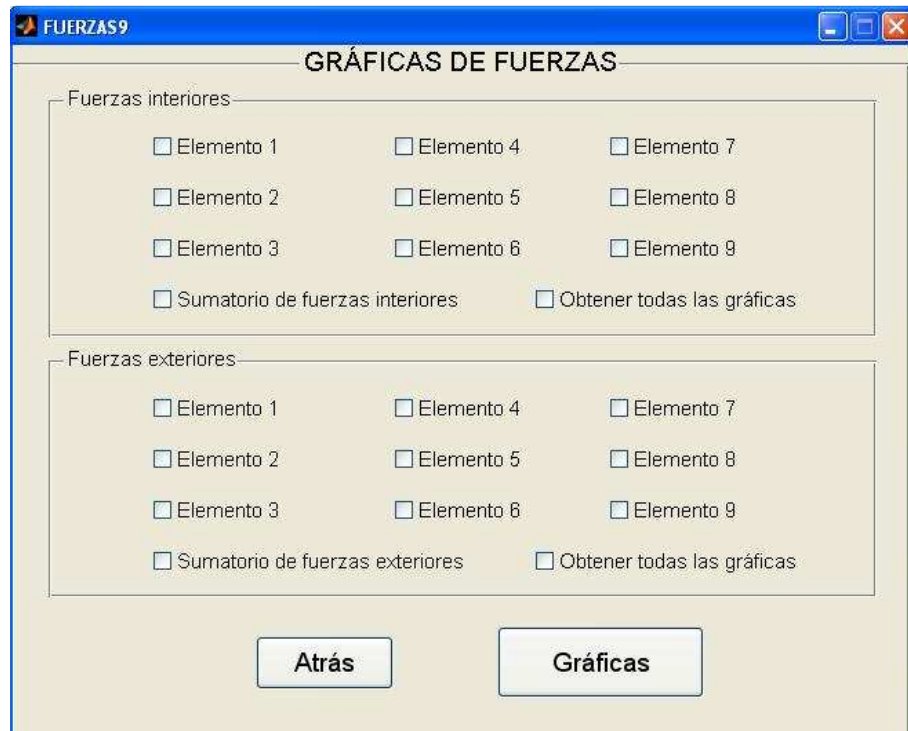


Figura 6.16. Pantalla de visualización de fuerzas por elemento rodante (9 elementos rodantes).



Figura 6.17. Pantalla de visualización de deformaciones por elemento rodante (3 elementos rodantes).

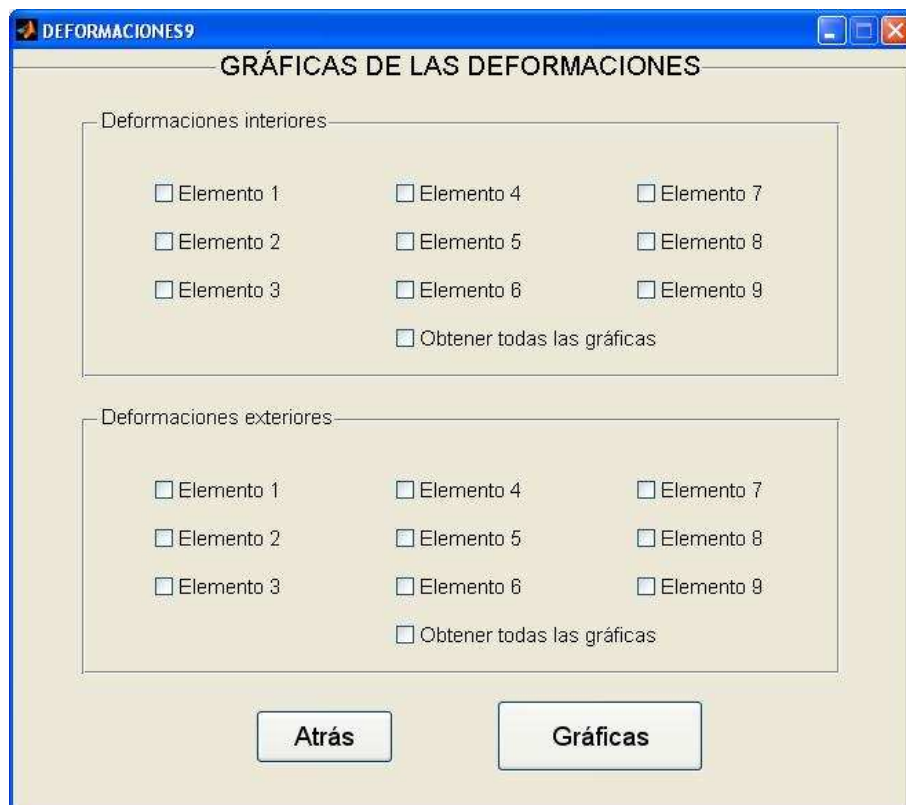


Figura 6.18. Pantalla de visualización de fuerzas por elemento rodante (9 elementos rodantes).

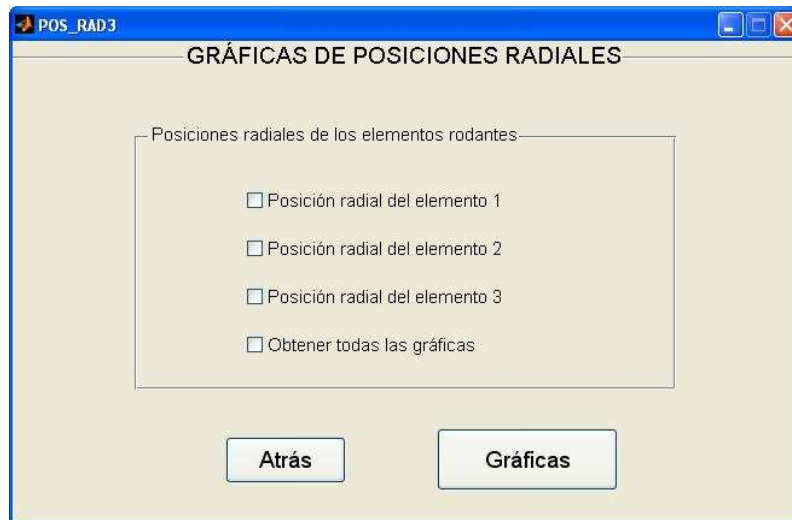


Figura 6.19. Pantalla de visualización de posiciones radiales por elemento rodante (3 elementos rodantes).

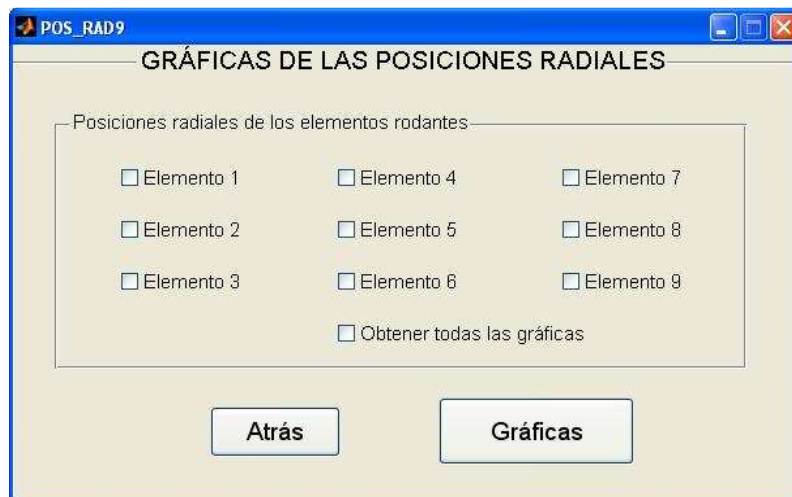


Figura 6.20. Pantalla de visualización de posiciones radiales por elemento rodante (9 elementos rodantes).

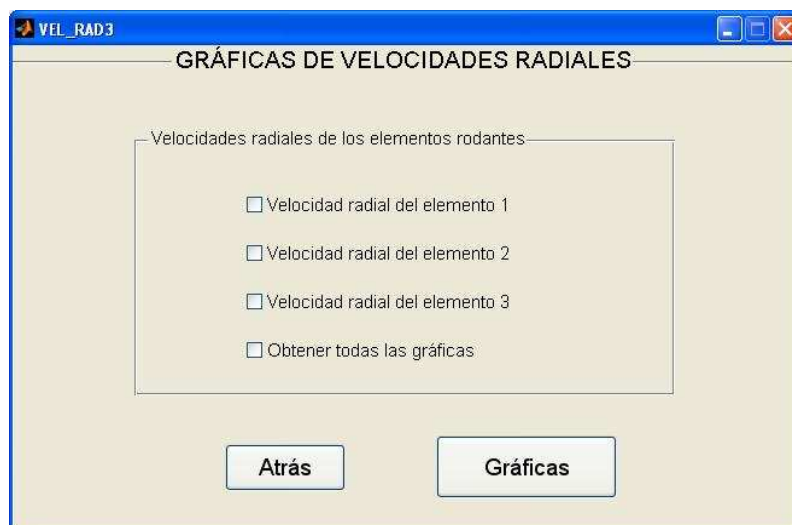


Figura 6.21. Pantalla de visualización de velocidades radiales por elemento rodante (3 elementos rodantes).

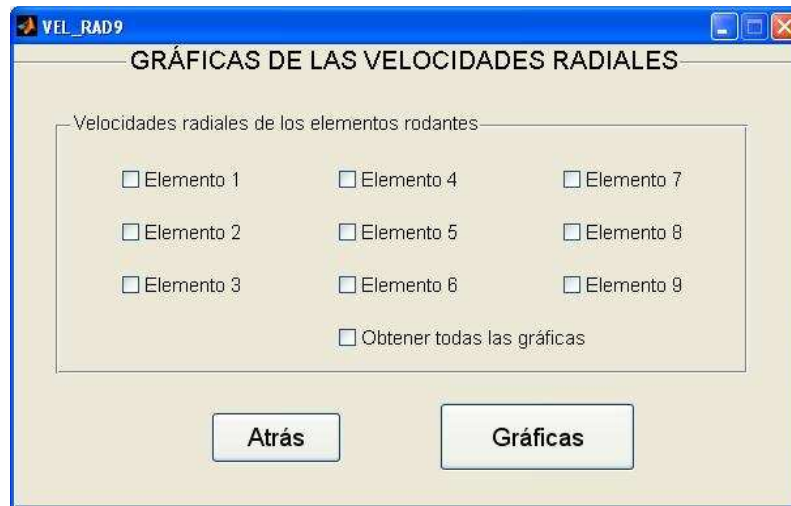


Figura 6.22. Pantalla de visualización de velocidades radiales por elemento rodante (9 elementos rodantes).

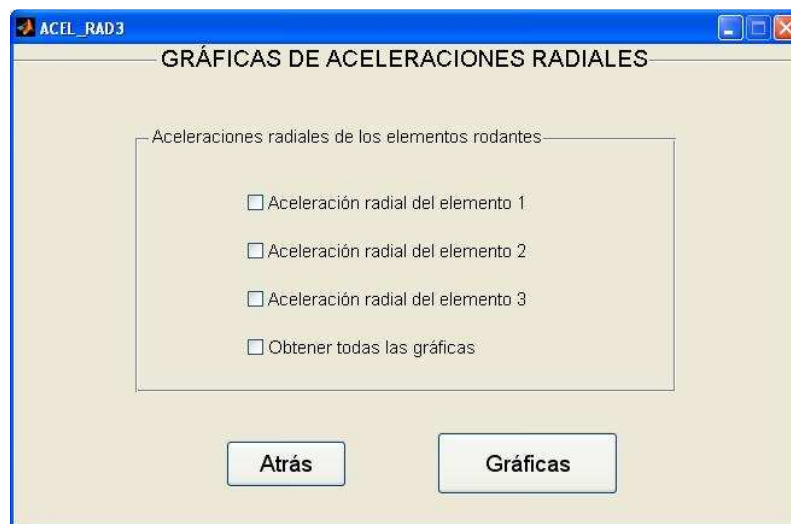


Figura 6.23. Pantalla de visualización de aceleraciones radiales por elemento rodante (3 elementos rodantes).

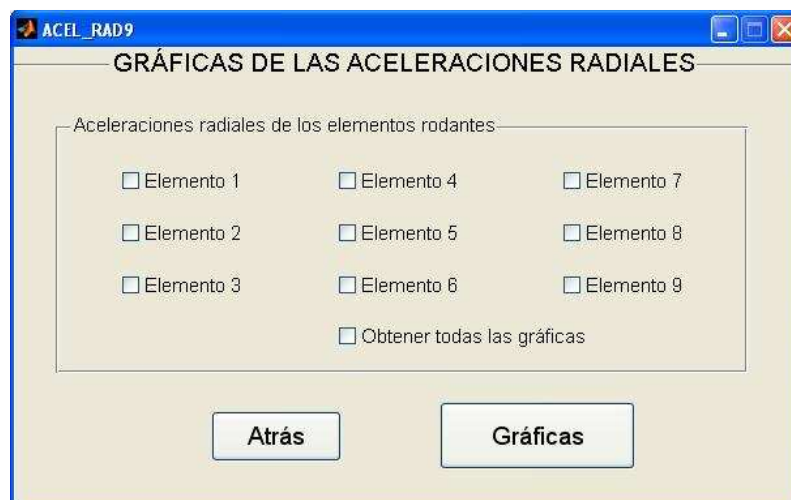


Figura 6.24. Pantalla de visualización de aceleraciones radiales por elemento rodante (9 elementos rodantes).

Las figuras 6.25, 6.26 y 6.27 muestran algunos de los resultados que se pueden obtener. Recaltar que todos estos resultados aparecen en pantallas que pueden grabarse en diferentes formatos, para ser editadas o utilizadas más tarde si se desea.

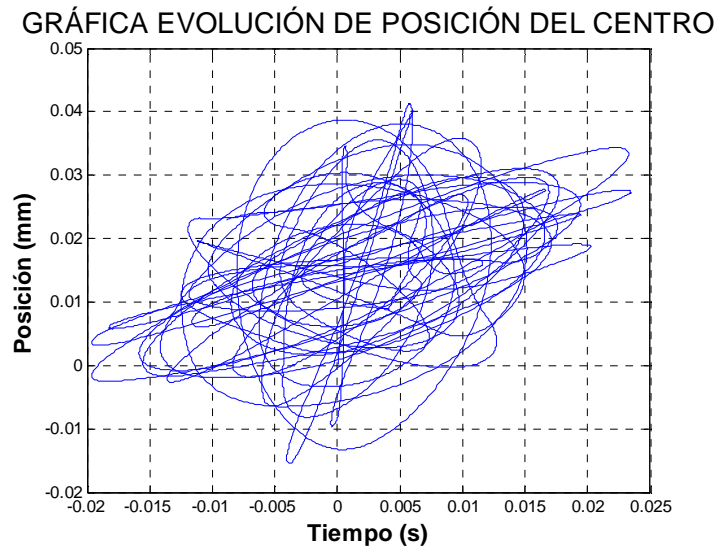


Figura 6.25. Gráfica de la evolución de la posición del C.A.I. en función de las coordenadas X e Y.

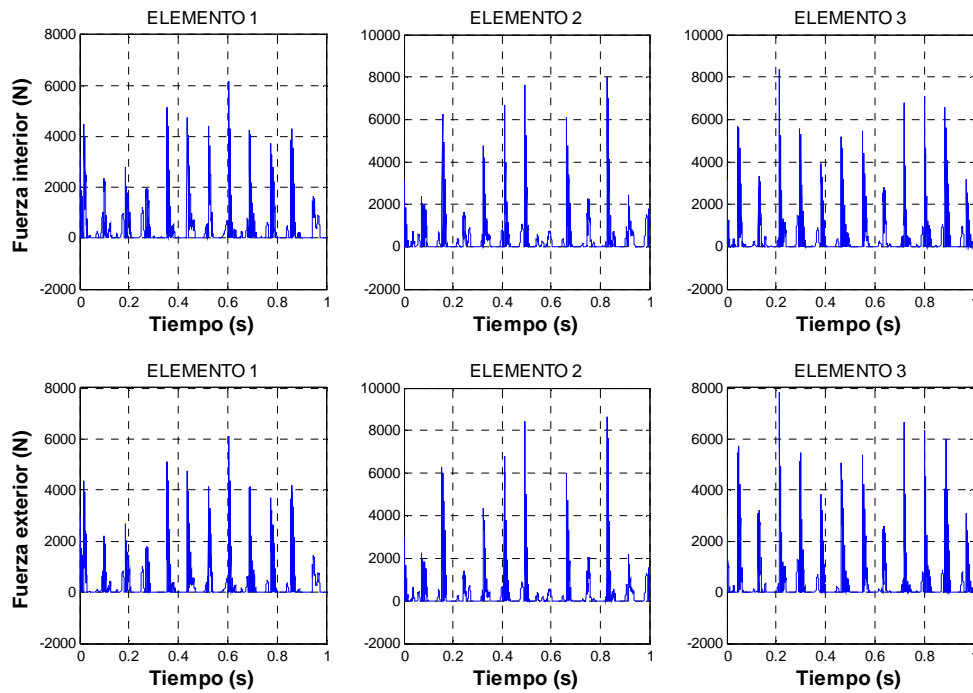


Figura 6.26 Muestra de las fuerzas de contacto elemento rodante-pistas interior y exterior.

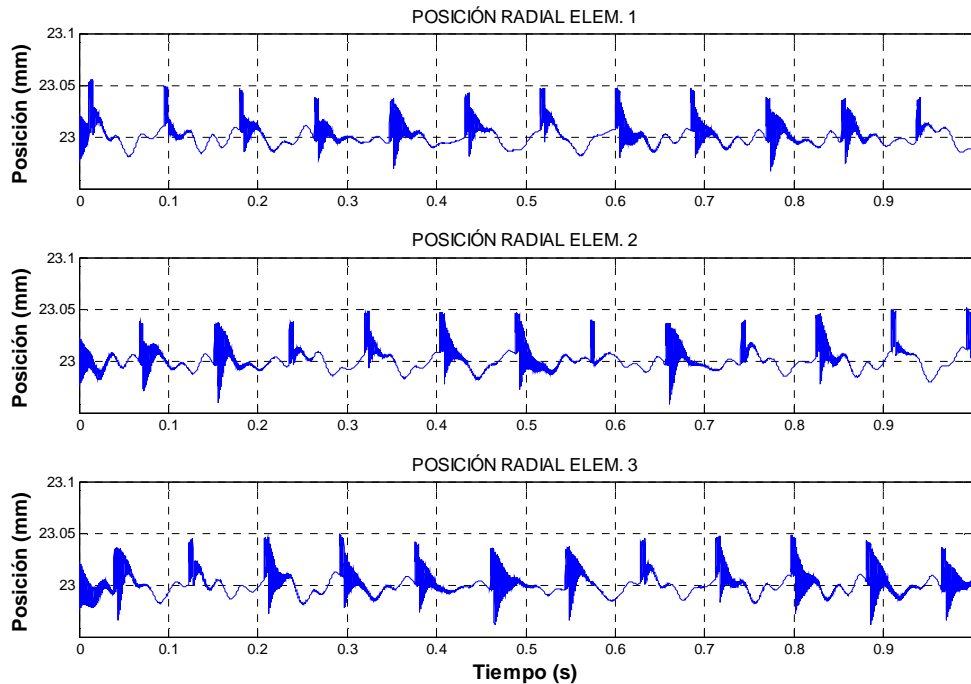


Figura 6.27. Gráficas de las posiciones radiales de los elementos rodantes.

6.1.2.2 Otras gráficas: Análisis en frecuencia

El botón “Otros” da acceso a los módulos usados para realizar los análisis en frecuencia de las formas de onda obtenidas para las posiciones, velocidades y aceleraciones del C.A.I. en sus dos coordenadas, que probablemente sea una de las opciones más interesantes de cara al análisis de la presencia de defectos y la gravedad de los mismos.

Se compone de 4 pestañas, representadas en la Figura 6.29:

- Envolventes de las señales
- Espectros de señales
- Espectros envolventes
- Wavelets

Al pulsar uno de los 4 botones, se pasa a la pantalla correspondiente, cerrándose la ventana y abriéndose, común a las 4 opciones, la pantalla de selección del parámetro a elegir.

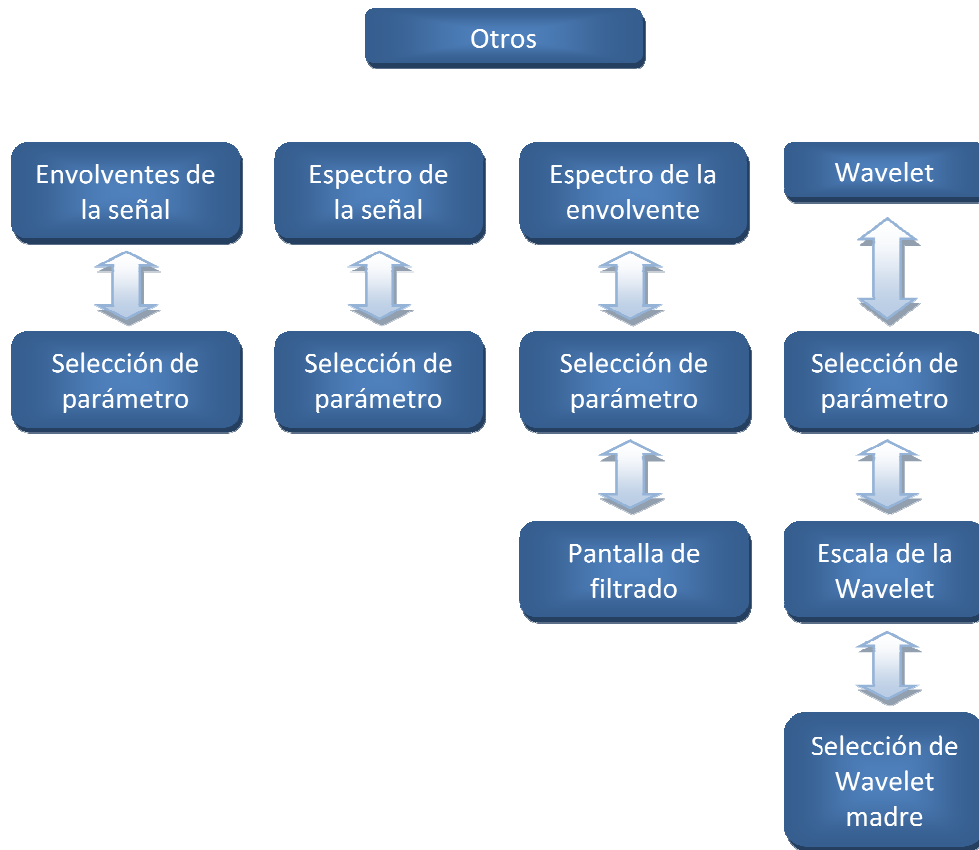


Figura 6.28. Diagrama de opciones del apartado "Otros"

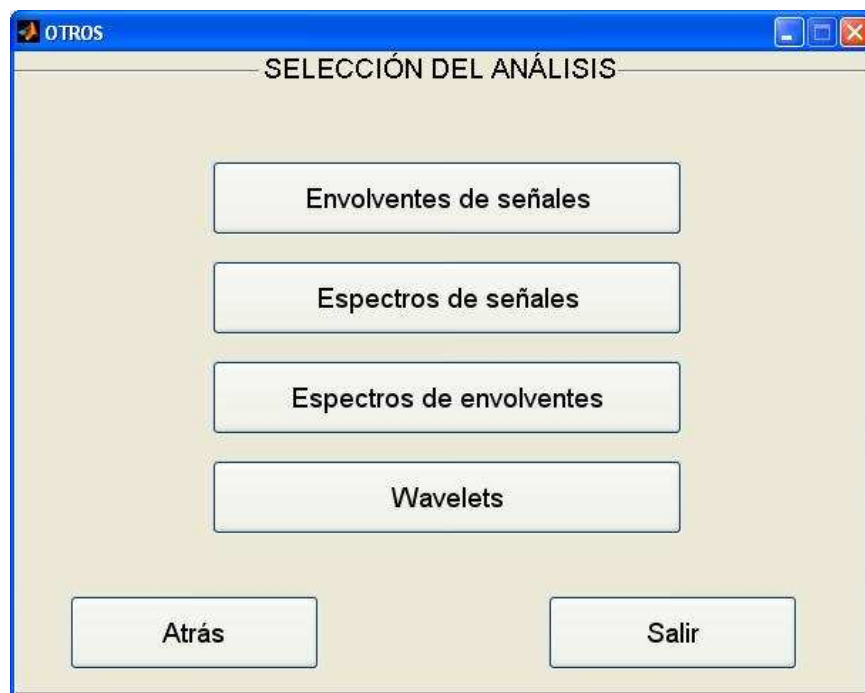


Figura 6.29. Pantalla de selección de opciones para el análisis en frecuencia.

Esta pantalla permite seleccionar la magnitud de la cual se pretende analizar su onda representativa. Se cuenta con 6 opciones para elegir:

- Coordenadas x e y de la posición del centro del anillo interior.

- Coordenadas x e y de la velocidad del centro del anillo interior.
- Coordenadas x e y de la aceleración del centro del anillo interior.

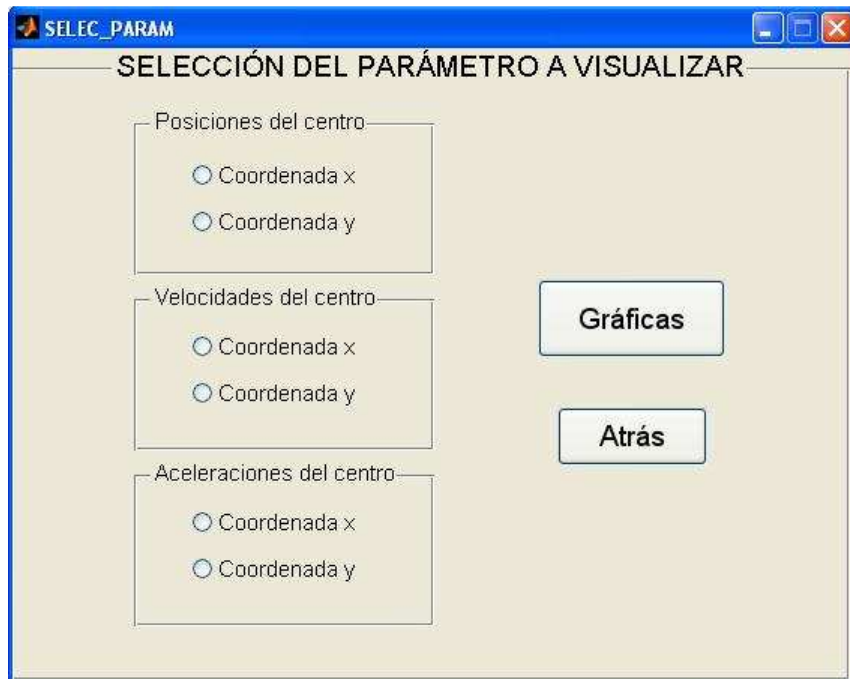


Figura 6.30. Pantalla de selección del parámetro a analizar.

Espectros de la envolvente y espectros de la señal temporal.

Estas dos opciones no revisten más que unas operaciones sencillas, sin posibilidad de personalización. Simplemente debe elegirse el parámetro a visualizar, y se mostrará en pantalla, como muestran las Figuras 6.31 y 6.32.

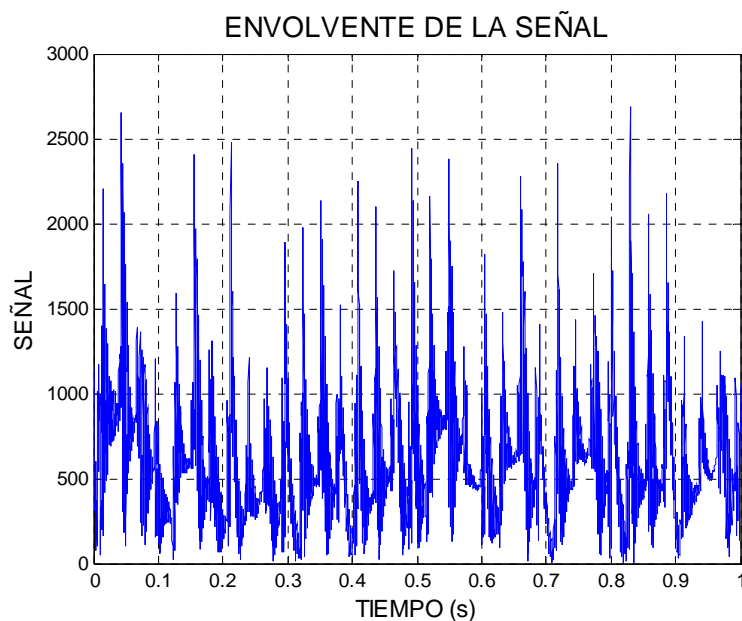


Figura 6.31. Envolvente de la señal temporal correspondiente a la aceleración en coordenada Y del C.A.I.

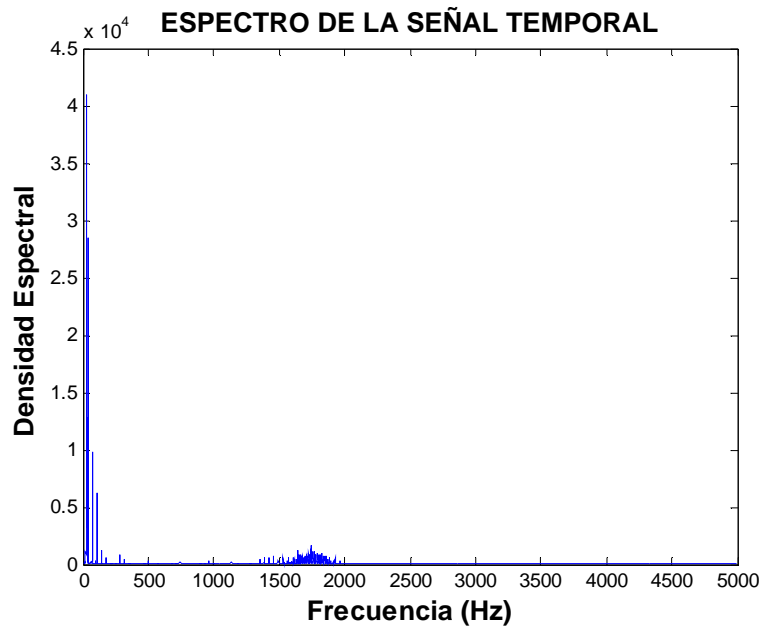


Figura 6.32. Espectro de la señal temporal correspondiente a la aceleración en coordenada Y del C.A.I.

Espectros de las señales envolventes

La teoría sobre la envolvente de la señal temporal se explicó en el apartado X del capítulo 2. Este módulo realiza el cálculo de este análisis frecuencial, incluyendo además un pequeño entorno interactivo, que permite tratar la señal de acuerdo a un filtro de paso bajo (Figura 6.33):

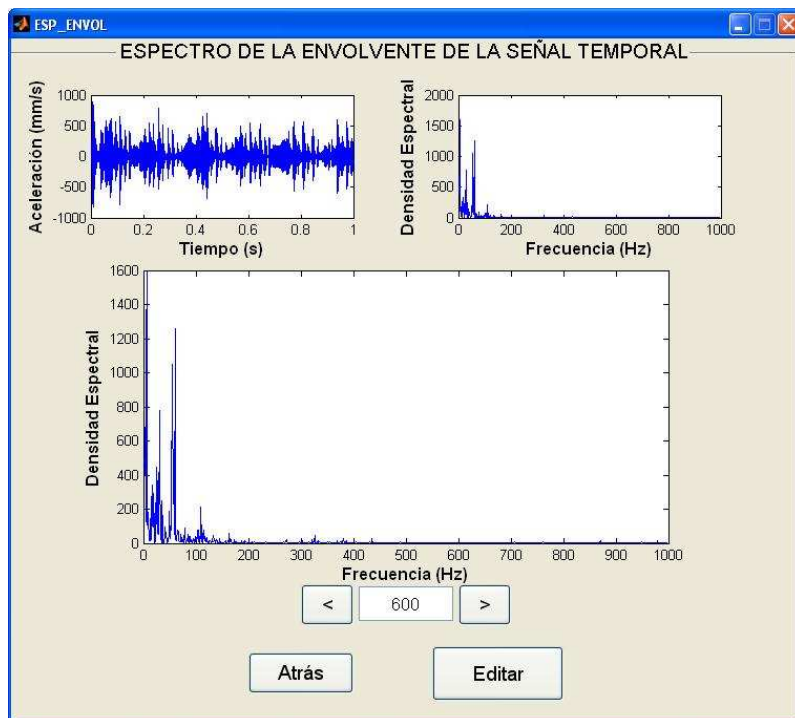


Figura 6.33. Pantalla de la utilidad para el análisis del espectro de la envolvente.

En ella, se utiliza un filtro paso bajo para eliminar las frecuencias altas, que puede variarse mediante unos selectores que aumentan o disminuyen en 50 Hz el valor del filtro, con límites entre 1 y 1000 Hz.

Wavelets

Para la Wavelet, son necesarios 2 parámetros, que se introducen en la pantalla mostrada por la Figura (6.34).

- Escala de representación de la Wavelet: Recordando el capítulo 2, esta escala se corresponde con el parámetro a .
- Número de vueltas: Recordando el capítulo 2, el número de vueltas se corresponde con el parámetro de traslación b .

El botón “Continuar” cierra la ventana y se pasa a seleccionar la wavelet madre (Figura 6.35).

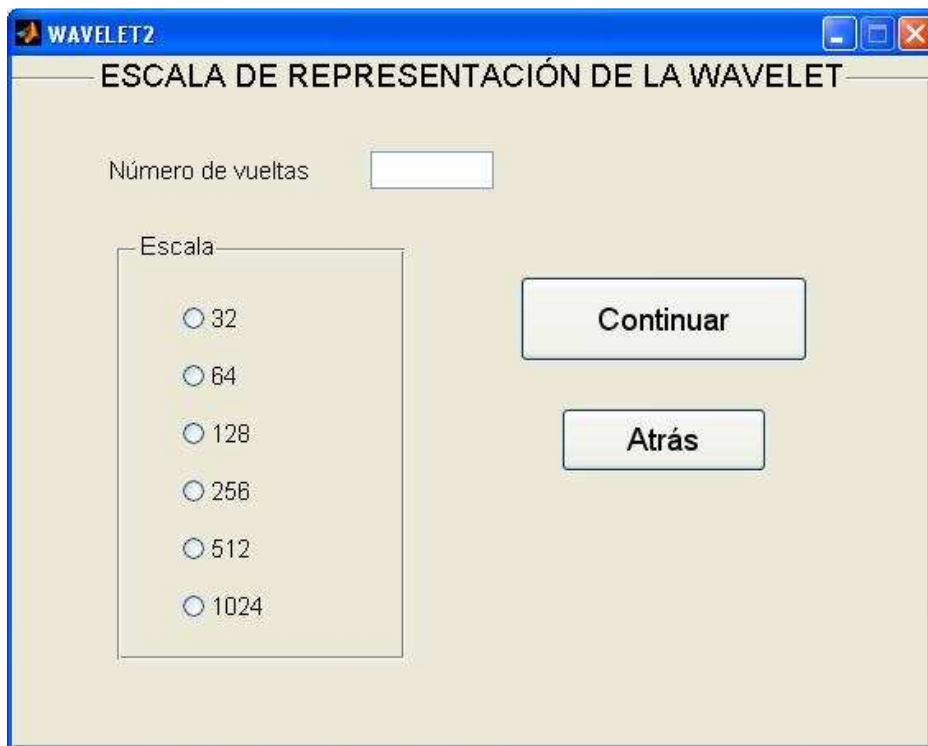


Figura 6.34. Pantalla de selección de parámetros de la Wavelet.



Figura 6.35. Pantalla de selección de la Wavelet.

Se selecciona el tipo de la Wavelet a usar:

- Para algunas Wavelet, al pulsar sobre ella se abre una nueva ventana en la que se elige el orden de la Wavelet.
- Para otras, al pulsar sobre ella se muestra directamente la Wavelet.

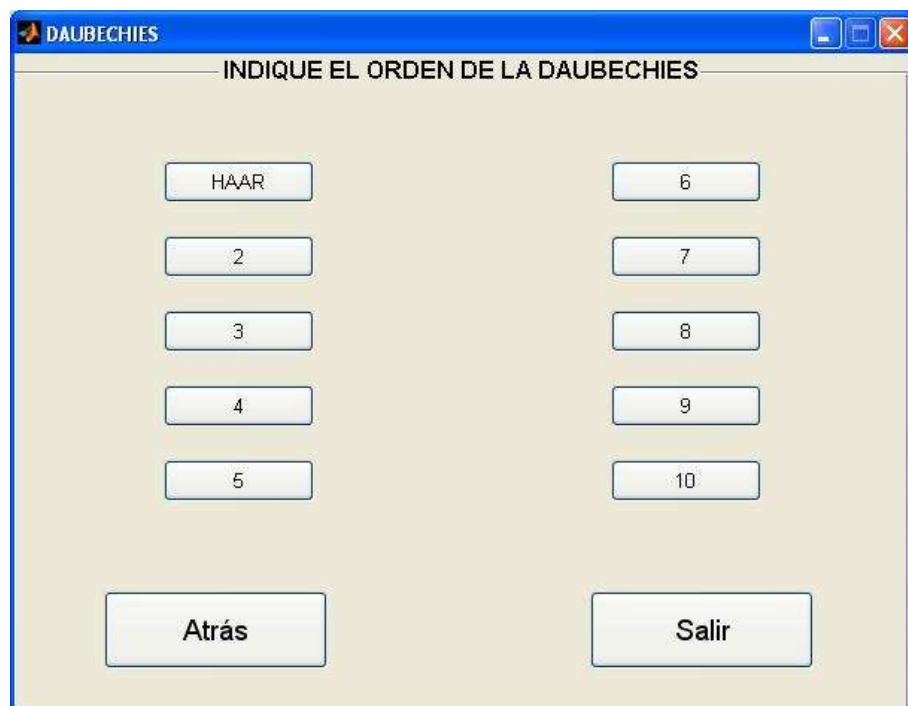


Figura 6.36. Pantalla de selección del orden de la Wavelet Daubechies.

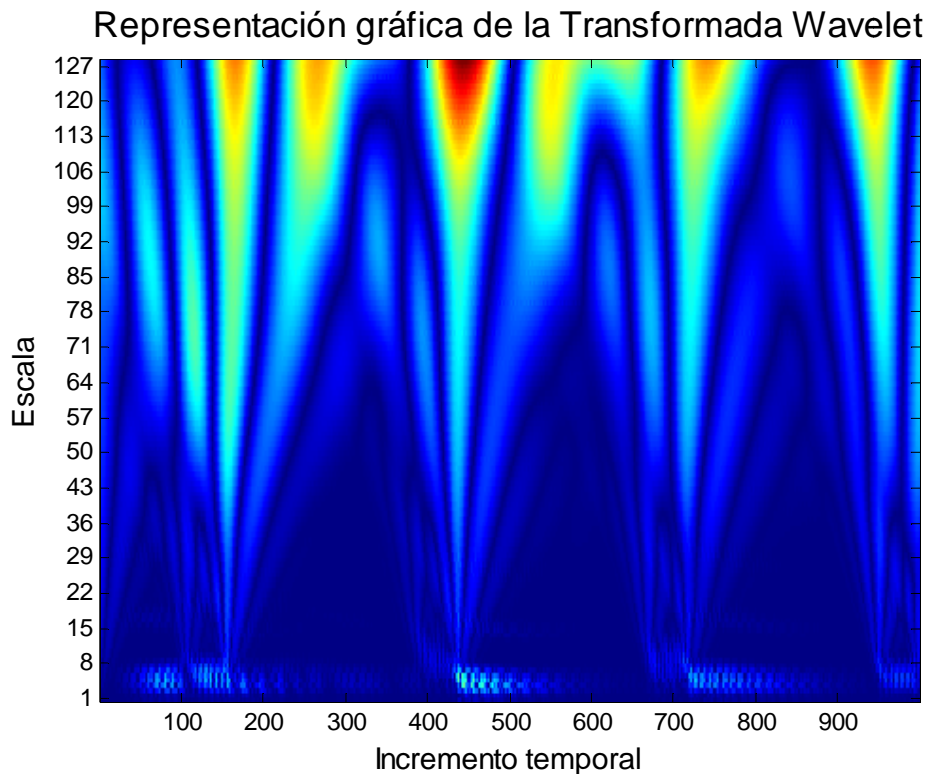


Figura 6.37. Ejemplo de Wavelet Daubechies de orden 5.

6.1.2.3 Resultados estadísticos

Para conocer con mayor exactitud los valores de los parámetros que el programa ha calculado, se incluye también esta funcionalidad, que permite conocer los valores estadísticos de cualquiera de las magnitudes que genera el modelo.

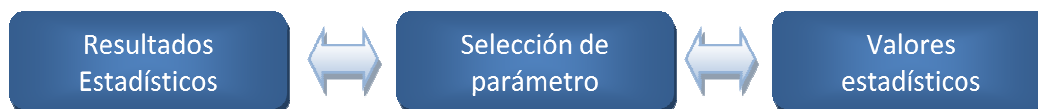


Figura 6.38. Diagrama de opciones del apartado “Resultados estadísticos”.

Cuando se pulsa en el botón “Resultados estadísticos”, se abre una de las dos pantallas siguientes, dependiendo del número de elementos rodantes que se hayan seleccionado, en las que podremos elegir el parámetro deseado (Figuras 6.39 y 6.40).

RES_EST1

SELECCIÓN DEL PARÁMETRO A EVALUAR

Posiciones del anillo interior:

- ☐ Coordenada x
- ☐ Coordenada y

Velocidades del anillo interior:

- ☐ Coordenada x
- ☐ Coordenada y

Aceleraciones del anillo interior:

- ☐ Coordenada x
- ☐ Coordenada y

Deformaciones interiores:

- ☐ Elemento 1
- ☐ Elemento 2
- ☐ Elemento 3

Deformaciones exteriores:

- ☐ Elemento 1
- ☐ Elemento 2
- ☐ Elemento 3

Fuerzas internas:

- ☐ Elemento 1
- ☐ Elemento 2
- ☐ Elemento 3

Fuerzas externas:

- ☐ Elemento 1
- ☐ Elemento 2
- ☐ Elemento 3

Posiciones radiales:

- ☐ Elemento 1
- ☐ Elemento 2
- ☐ Elemento 3

Velocidades radiales:

- ☐ Elemento 1
- ☐ Elemento 2
- ☐ Elemento 3

Aceleraciones radiales:

- ☐ Elemento 1
- ☐ Elemento 2
- ☐ Elemento 3

Obtención de parámetros **Atrás**

Figura 6.39. Selección del parámetro para el análisis estadístico (3 elementos rodantes).

RES_EST3

SELECCIÓN DEL PARÁMETRO A EVALUAR

Posiciones del anillo interior:

- ☐ Coordenada x
- ☐ Coordenada y

Velocidades del anillo interior:

- ☐ Coordenada x
- ☐ Coordenada y

Aceleraciones del anillo interior:

- ☐ Coordenada x
- ☐ Coordenada y

Fuerzas interiores:

- ☐ Elemento 1
- ☐ Elemento 2
- ☐ Elemento 3
- ☐ Elemento 4
- ☐ Elemento 5
- ☐ Elemento 6
- ☐ Elemento 7
- ☐ Elemento 8
- ☐ Elemento 9

Fuerzas exteriores:

- ☐ Elemento 1
- ☐ Elemento 2
- ☐ Elemento 3
- ☐ Elemento 4
- ☐ Elemento 5
- ☐ Elemento 6
- ☐ Elemento 7
- ☐ Elemento 8
- ☐ Elemento 9

Deform. interiores:

- ☐ Elemento 1
- ☐ Elemento 2
- ☐ Elemento 3
- ☐ Elemento 4
- ☐ Elemento 5
- ☐ Elemento 6
- ☐ Elemento 7
- ☐ Elemento 8
- ☐ Elemento 9

Deform. exteriores:

- ☐ Elemento 1
- ☐ Elemento 2
- ☐ Elemento 3
- ☐ Elemento 4
- ☐ Elemento 5
- ☐ Elemento 6
- ☐ Elemento 7
- ☐ Elemento 8
- ☐ Elemento 9

Pos. radiales:

- ☐ Elemento 1
- ☐ Elemento 2
- ☐ Elemento 3
- ☐ Elemento 4
- ☐ Elemento 5
- ☐ Elemento 6
- ☐ Elemento 7
- ☐ Elemento 8
- ☐ Elemento 9

Vel. radiales:

- ☐ Elemento 1
- ☐ Elemento 2
- ☐ Elemento 3
- ☐ Elemento 4
- ☐ Elemento 5
- ☐ Elemento 6
- ☐ Elemento 7
- ☐ Elemento 8
- ☐ Elemento 9

Acel. radiales:

- ☐ Elemento 1
- ☐ Elemento 2
- ☐ Elemento 3
- ☐ Elemento 4
- ☐ Elemento 5
- ☐ Elemento 6
- ☐ Elemento 7
- ☐ Elemento 8
- ☐ Elemento 9

Obtención de parámetros **Atrás**

Figura 6.40. Selección del parámetro para el análisis estadístico (9 elementos rodantes).

El botón “Obtención de Parámetros” cierra la ventana y pasa a la pantalla de valores estadísticos (Figura 6.41), en la que se presentan los resultados y donde se pueden encontrar:

- Valor eficaz
- Valor medio
- Valor de pico
- Valor de pico a pico
- Factor de forma
- Factor de cresta
- Media
- Mediana
- Desviación estándar
- Mínimo
- Máximo
- Varianza

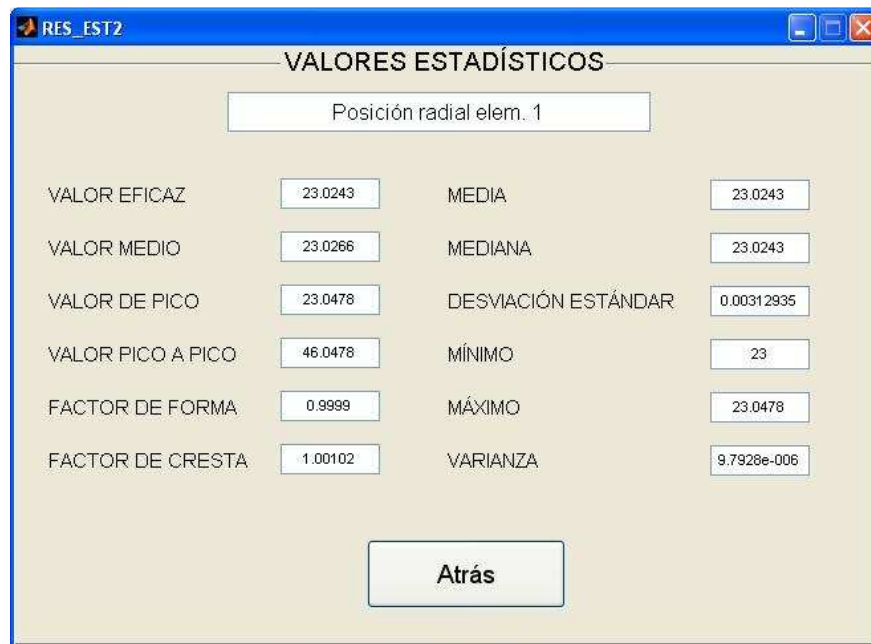


Figura 6.41. Pantalla de visualización de los parámetros estadísticos.

6.2 Funcionalidades adicionales

Además de la visualización y tratamiento de resultados, el programa consta aún de una última utilidad. Matlab guarda sus resultados en archivos con formato .mat, que usa el programa para cargar los parámetros que necesita. Este proceso de guardado de datos se realiza justo después de la finalización de la simulación, al principio de la carga de la pantalla “Análisis”. Los datos que guarda este archivo son:

- Posiciones en coordenadas x e y del centro del anillo interior.

- Velocidades en coordenadas x e y del centro del anillo interior.
- Aceleraciones en coordenadas x e y del centro del anillo interior.
- Deformaciones de todos los elementos rodantes.
- Fuerzas de contacto internas y externas de todos los elementos rodantes.
- Posiciones radiales de todos los elementos rodantes.
- Velocidades radiales de todos los elementos rodantes.
- Aceleraciones radiales de todos los elementos rodantes.

Pero también se considera la posibilidad de que estos datos puedan ser utilizados por otros programas diferentes a Matlab. Por ello, se generan 2 archivos .txt, que actúa como formato polivalente, el primero de los cuales se denomina PARAMETROS_GDL.txt y almacena exactamente los mismos datos que se han enumerado antes, y el segundo llamado DATOS_GDL.txt, que se encarga de almacenar todos los parámetros físicos, geométricos, de funcionamiento... que se eligieron en las pantallas de introducción de datos.

Gracias a estos archivos, en primer lugar los resultados pueden ser evaluados y tratados en programas que acepten este formato, y pueden almacenarse los parámetros que se utilizaron para generarlos, con vistas a repetir las simulaciones cuando sean necesarias, o llevar un registro de lo realizado, en un formato más manejable que el que utiliza Matlab.

Capítulo 7

Conclusiones

7.1 Conclusiones

El objetivo original de este Proyecto Fin de Carrera era el análisis y evolución de la tesis doctoral “Análisis y caracterización holista de un sistema rotativo complejo”, elaborada por el Doctor D. José María Marín López, además de crear documentación que facilite su comprensión y programas auxiliares que simplifiquen su utilización. Al final del proyecto se puede concluir afirmando que se han alcanzado con éxito todos y cada uno de los objetivos propuestos al comienzo del mismo.

Se han conseguido cumplir los tres objetivos principales:

- La revisión y evolución de los modelos matemáticos de la dinámica de rodamientos, con y sin defecto, utilizando formulación de Newton y de Lagrange, desarrollados en la tesis doctoral antes mencionada, para la creación de nuevos modelo de simulación de rodamiento.
- Análisis de la sensibilidad de los principales parámetros mecánicos en la dinámica general de los diferentes modelos de rodamientos. Estudio de la estabilidad de los modelos.
- Desarrollo de una aplicación informática, implementada en Matlab, utilizando también sus herramientas Guide y Simulink, que permita introducir, de una manera sencilla, los diferentes valores de los parámetros del modelo y ofrezca

CAPÍTULO 7: CONCLUSIONES

un acceso total a todos los resultados posibles, dotando también a la aplicación de herramientas de procesamiento de la señal que faciliten el análisis de los resultados.

El punto de partida fueron los archivos de la tesis citada, a los cuales se les realizaron las correcciones y adiciones necesarias para darle más robustez a los modelos. De hecho, lo realizado en este proyecto son dos de los trabajos futuros que se proponían en la tesis.

- Realizar un análisis de estabilidad de los modelos para establecer zonas de convergencia y zonas donde es posible realizar las simulaciones oportunas, utilizando datos realistas.
- Realizar un interface mediante la herramienta GUI (Graphical User Interface) del software Matlab, de tal forma que se facilite la introducción o modificación de los parámetros más representativos utilizados en las simulaciones, gráficas de resultados e incluso método de simulación.

Se siguió un proceso iterativo con el que a cada paso significativo se le realizaban controles, tanto con comparaciones con resultados teóricos como análisis de estabilidad.

Una vez se consiguió el modelo más ajustado posible a los supuestos teóricos, se hizo un amplio estudio para averiguar el comportamiento del modelo, tanto en el aspecto de la linealidad como en el de la estabilidad. Los resultados arrojaron las conclusiones de que el modelo generaba valores más realistas en lo referente a movimientos del C.A.I., deformaciones y fuerzas. Los experimentos constaron de:

- Variación de la constante de rigidez en un $\pm 50\%$, $\pm 25\%$ y 100% (5 variaciones).
- Para cada variación, se realizan simulaciones variando 5 parámetros de entrada.
- En total, se realizan 25 simulaciones por modelo, lo que genera 200 simulaciones (4 modelos nuevos y 4 originales).
- Cada simulación genera 10 resultados a analizar, con lo que en conjunto son 2000 gráficas de resultados, que agrupan las 5 variaciones de la constante de rigidez según el parámetro de entrada. El número final de gráficas es de 400.

Otra de las claves del proyecto era que las posibles modificaciones que se realizaron a los modelos, tanto de Newton como de Lagrange, no alterasen una de las conclusiones de la tesis anterior, que afirmaba que la simplificación del ángulo β en el modelo de Newton contribuía decisivamente a la eliminación de complejidad, sin por ello perder fiabilidad. En el capítulo 5 se comenta que el objetivo se ha logrado, pero no se muestran las gráficas de Lagrange para no saturar el capítulo con gráficas. En los anexos que se presentan con el proyecto, se han incluido todas las gráficas, y pueden compararse los dos modelos.

Se creó un entorno visual utilizando el programa Matlab-GUI, que pretendía hacer más sencillo el uso del programa, ya que los valores de las constantes utilizadas por el modelo debían ser cambiados abriendo el archivo de datos. Esto provocaba que pudiesen existir situaciones en las que, pese a que la simulación fuese válida, los parámetros variados no correspondiesen con otros que también debían cambiar (por ejemplo, las constantes de rigidez o las masas de los elementos cambian con la variación de las dimensiones del rodamiento). El programa genera unos valores por defecto, y además

varía automáticamente el resto de parámetros dependientes. El programa también incluye subprogramas que efectúan también de modo automático el cálculo de las constantes de rigidez o la posición inicial del anillo interior en función de las fuerzas externas, que antes era introducida a mano a pesar de que este parámetro es casi imposible de controlar. Además, integra programas de tratamiento de resultados, como la obtención de valores estadísticos, wavelets o análisis de frecuencia.

Atendiendo a los objetivos iniciales, basados además en los trabajos futuros de la tesis de partida, se concluye que se ha alcanzado la meta pretendida, ya que se ha conseguido simplificar la introducción de datos, dándole una interfaz más amable, complementada con los nuevos programas de tratamiento de datos. Además, se han corregido comportamientos defectuosos del sistema y depurado los bloques que representaban las ecuaciones, encontrando los parámetros clave del sistema y comprobando que el modelo es estable para un margen utilizable del rodamiento.

7.2 Trabajos futuros

Como líneas de mejora, se proponen como evoluciones futuras:

- En este proyecto, la holgura es un parámetro auxiliar, pero no funcional, ya que las variaciones de la misma no genera resultados correctos ni predecibles. El objetivo es hacer de ella un parámetro que pueda ser utilizado de forma efectiva.
- El modelo está adaptado a la realización de simulaciones en un rodamiento SKF 6206, con variaciones mínimas de los parámetros geométricos (diámetros de pistas, de elementos rodantes...). Se propone la extensión de las simulaciones para analizar el comportamiento de los modelos con rodamientos de dimensiones alejadas del caso estudiado.
- En lo referente a la inclusión de defectos, los defectos que el programa genera son de tipo escalón. Una evolución interesante sería modificar la programación para poder parametrizar de algún modo el defecto: curva/ pendiente de entrada y salida, ondulación o rugosidad... con objeto de hacerlo más realista.

Capítulo 8

Presupuesto

Se expone a continuación un pequeño desglose de las actividades, equipos y personal que han sido utilizadas o han colaborado en la realización de este proyecto, detallándose con información económica y temporal, con objeto de ofrecer un presupuesto que pueda servir como indicador del coste del proyecto. El desglose de costes se ha dividido en cuatro grupos:

- Personal: Estimación del coste de todo el personal que ha intervenido en el proyecto. En este caso, como Ingeniero Senior, el tutor del proyecto, Higinio Rubio Alonso y el autor del proyecto, Jose Luis García Barreiro, como Ingeniero.
- Equipos: Se estima la amortización del conjunto de equipos utilizados para la realización del proyecto: PC de sobremesa, y licencias de software Matlab y Office 2007.
- Subcontratación: Apartado en el que se desglosan todas las tareas que requieran de subcontratación a empresas externas. En este caso, todo ha sido realizado sin llevar a cabo esta práctica, por lo que queda en blanco.
- Resto de costes directos: Se establece en este apartado los costes generales que faltan por detallar, tales como dietas, viajes, materiales fungibles, coste de impresión...

CAPÍTULO 8: PRESUPUESTO

Tabla 8.1 Desglose del presupuesto del PFC.

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID					
Escuela Politécnica Superior					
PRESUPUESTO DE PROYECTO					
1.- Autor:					
Jose Luis García Barreiro					
2.- Departamento:					
Ingeniería Mecánica					
3.- Descripción del Proyecto:					
- Título	Modelo dinámico de rodamiento. Aplicación informática SIMROD.				
- Duración (meses)	8				
Tasa de costes indirectos:	10%				
4.- Presupuesto total del Proyecto (valores en Euros):					
18.244,00 Euros					
5.- Desglose presupuestario (costes directos)					
PERSONAL					
Apellidos y nombre	N.I.F. (no rellenar solo a título informativo)	Categoría	Dedicación (hombres mes) ^{a)}	Coste hombre mes	Coste (Euro)
García Barreiro, Jose Luis	48574868 H	Ingeniero	4,8	2.625,00	12.600,00
Rubio Alonso, Higinio		Ingeniero Senior	0,608	4.593,75	2.793,00
					0,00
					0,00
					0,00
Hombres mes 5,408				Total	15.393,00
^{a)} 1 Hombre mes = 131,25 horas. Máximo anual de dedicación de 12 hombres mes (1575 horas) Máximo anual para PDI de la Universidad Carlos III de Madrid de 8,8 hombres mes (1.155 horas)					
EQUIPOS					
Descripción	Coste (Euro)	% Uso dedicado proyecto	Dedicación (meses)	Periodo de depreciación	Coste imputable ^{d)}
PC sobremesa	800,00	100	8	40	160,00
Programa Matlab	2.000,00	87,5	7	15	816,67
Software Office	149,90	25	2	72	1,04
		100		60	0,00
		100		60	0,00
					0,00
				Total	977,71
^{d)} Fórmula de cálculo de la Amortización:					
$\frac{A}{B} \times C \times D$		A = nº de meses desde la fecha de facturación en que el equipo es utilizado B = periodo de depreciación (60 meses) C = coste del equipo (sin IVA) D = % del uso que se dedica al proyecto (habitualmente 100%)			
SUBCONTRATACIÓN DE TAREAS					
Descripción	Empresa	Coste imputable			
No aplica					
		Total	0,00		
OTROS COSTES DIRECTOS DEL PROYECTO ^{a)}					
Descripción	Empresa	Costes imputable			
Desplazamientos	Universidad Carlos III	60,00			
Impresión de documentos	Fotocopias El Callejón	140,00			
Soporte informático	Fotocopias El Callejón	15,00			
		Total	215,00		
^{a)} Este capítulo de gastos incluye todos los gastos no contemplados en los conceptos anteriores, por ejemplo: fungible, viajes y dietas,					
6.- Resumen de costes					
Presupuesto Costes Totales	Presupuesto Costes Totales				
Personal	15.393				
Amortización	978				
Subcontratación de tareas	0				
Costes de funcionamiento	215				
Costes indirectos	1.659				
Total	18.244				

Glosario

α	Ángulo de contacto del rodamiento	grados
α_i	Posición angular del elemento rodante i	grados
α_{in}	Posición angular del rotor	grados
α_{df_in}	Posición final angular del defecto sobre el anillo interior	grados
α_{df_out}	Posición final angular del defecto sobre el anillo exterior	grados
α_{di_in}	Posición inicial angular del defecto sobre el anillo interior	grados
α_{di_out}	Posición inicial angular del defecto sobre el anillo exterior	grados
a	Semieje menor de la elipse de contacto según la teoría de Hertz	mm
b	Semieje mayor de la elipse de contacto según la teoría de Hertz	mm
β		grados
BPMI	Frecuencia de paso del elemento rodante por defecto en anillo interior	Hz
BPFO	Frecuencia de paso del elemento rodante por defecto en anillo exterior	Hz
BSF	Frecuencia de un defecto localizado en un elemento rodante	Hz
C.A.I.	Abreviatura de Centro del Anillo Interior	N·s/mm
C_{in}	Constante de rigidez del contacto elemento rodante-pista interior	$N/mm^{3/2}$
C_{out}	Constante de rigidez del contacto elemento rodante-pista exterior	$N/mm^{3/2}$
d_{bo}	Diámetro del elemento rodante	Mm
D_{in}	Constante de amortiguamiento del contacto elemento rodante-pista interior	N·s/mm
d_m	Diámetro medio del rodamiento	mm
D_{out}	Constante de amortiguamiento del contacto elemento rodante-pista exterior	N·s/mm
δ_{in}	Deformación por contacto elemento rodante- pista interior	mm
δ_{out}	Deformación por contacto elemento rodante- pista exterior	mm
δ_r	Deformación total del elemento rodante	mm
ϵ	Factor de distribución de carga	
F_{ex}	Fuerza exterior en dirección X	Newton
F_{ey}	Fuerza exterior en dirección Y	Newton
F_u	Fuerza de desequilibrio del rotor	Newton
FTF	Frecuencia del Tren Fundamental (Frecuencia de jaula)	Hz
$F(\rho)$	Curvatura diferencia	
h_r	Holgura radial	mm
K_l	Constante de rigidez de un elemento rodante tipo cilindro	$N/mm^{8/9}$
L_{d_in}	Longitud del arco del defecto en pista interior	mm
L_{d_out}	Longitud del arco del defecto en pista exterior	mm

CAPÍTULO 8: GLOSARIO

L_{in}	Vector de posición del centro de masas del anillo interior	mm
m_{bo}	Masa del elemento rodante	kg
m_{in}	Masa del anillo interior	kg
m_{out}	Masa del anillo exterior	kg
m_{rotor}	Masa del rotor	kg
ρ_i	Vector de posición del centro del elemento rodante respecto del C.A.I.	mm
r_i	Vector de posición del centro del elemento rodante respecto al centro del anillo exterior	mm
r_{in}	Radio de la pista interior del rodamiento	mm
R_{out}	Radio de la pista exterior del rodamiento	mm
STFT	Transformada rápida de Fourier	
ω_{in}	Velocidad de giro del rotor	rad/s
ω_{jaula}, ω_c	Velocidad de giro de la jaula	rad/s
x_{in}	Posición en la coordenada x del C.A.I.	mm
y_{in}	Posición en la coordenada y del C.A.I.	mm
X_{in_O}	Posición inicial en la coordenada x del C.A.I.	mm
Y_{in_O}	Posición inicial en la coordenada y del C.A.I.	mm
Z	Número de elementos rodantes	
$\sum \rho$	Curvatura suma	
σ_{max}	Tensión maxima en el area de contacto de Hertz	Pa

Referencias

Libros y publicaciones

- [1] MARÍN LÓPEZ, JOSÉ MARÍA. *Análisis y caracterización holista de un sistema rotativo complejo*. Leganés, 2009. Tesis Doctoral presentada en la Escuela Politécnica Superior de la Universidad Carlos III de Madrid. 390 p.
- [2] HARRIS, TEDRIC A. *Rolling bearing analysis*. 4a ed. New York: John Wiley & Sons, 2001. 1086 p. ISBN: 0471354570.
- [3] PASAMONTES GARCÍA; MARIO. *La transformada Wavelet en el análisis de señales: aplicación a vibraciones en sistemas rotativos*. Leganés, 2005. Proyecto final de carrera presentado en la Escuela Politécnica Superior de la Universidad Carlos III de Madrid. 192 p.
- [4] TAPA K. SARKAR, MAGDALENA SALAZAR-PALMA, MICHAEL C. WICKS. *Wavelet Applications in Engineering Electromagnetics*. Norwood, EEUU: 2002. 337 p. ISBN 1-58053-267-5.
- [5] GARCÍA GÓMEZ, CARLOS. *Evaluación del estado de un elemento mecánico mediante técnicas modernas de análisis de la señal de vibración: aplicación a rodamientos*. Leganés, 2002. Proyecto final de carrera presentado en la Escuela Politécnica Superior de la Universidad Carlos III de Madrid. 307 p.
- [6] GARCÍA-PRADA J. C., RUBIO H., CASTEJÓN C. *Analytical model of rolling bearing studying ball-race contact for predictive maintenance*. Multibody Dynamics 2005, ECCOMAS Thematic Conference. Madrid, Spain, 21–24 June 2005.

- [7] GARCÍA-PRADA J. C., RUBIO H., et alt. Simulación de defectos en elementos rodantes: aplicación a rodamientos. Anales de Ingeniería Mecánica, XV CNIM, 1478-1583, 2003.
- [8] DEN HARTOG, J. P. Mechanical vibrations. 11a ed. New York: Dover, 1985. 436 p. ISBN: 0-486-64785-4.
- [9] VICARIO TOMASELLI, DANIELA. Evolución de una aplicación informática para el análisis y simulación de vibraciones. ADEVI 3.1. Leganés, 2007. Proyecto fin de carrera presentado en la Escuela Politécnica Superior de la Universidad Carlos III de Madrid. 447 p.
- [10] JIMÉNEZ PÉREZ, JAIME. Análisis y simulación de vibraciones en engranajes. ADEVI 4.5. Leganés, 2009. Proyecto fin de carrera presentado en la Escuela Politécnica Superior de la Universidad Carlos III de Madrid. 325 p.
- [11] VIDAL CASTAÑEDA, ANA. Desarrollo de una aplicación informática para el análisis y simulación de señales mecánicas. Leganés, 2005. Proyecto fin de carrera presentado en la Escuela Politécnica Superior de la Universidad Carlos III de Madrid. 315 p.
- [12] SÁNCHEZ MARTÍN, ANDRÉS. Aplicación de técnicas de análisis de vibración en la diagnosis del grado de defecto de un elemento mecánico. Leganés, 2002. Proyecto fin de carrera presentado en la Escuela Politécnica Superior de la Universidad Carlos III de Madrid. 285 p.
- [13] CORRALES FERNÁNDEZ, M^a ESTHER. Aplicación informática para el análisis y simulación de señales vibratorias generadas por elementos mecánicos. Leganés, 2003. Proyecto fin de carrera presentado en la Escuela Politécnica Superior de la Universidad Carlos III de Madrid. 237 p.
- [14] LAFITA BABIO, F.; MATA-CORTÉS, A. Vibraciones mecánicas en ingeniería. Madrid: INTA, 1964. 637 p. Depósito Legal M. 16.-1964.
- [15] S. BRAUN. Discover Signal Processing: An Interactive Guide for Engineers. 1^a ed. John Wiley & Sons, 2008. 345 p.
- [16] N. S. FENG, E. J. HAHN, R. B. RANDALL. Simulation of vibration signals from a rolling element bearing defect. DSTO International Conference on Health and Usage Monitoring, Melbourne, Australia, 2001.
- [17] S. P. HARSHA. Non-Linear dynamic response of a balanced rotor supported on rolling element bearings. Mechanical Systems and Signal Processing. 19, 551-578, 2005
- [18] GARCÍA DE JALÓN, JAVIER. Aprenda Matlab 7.0 como si estuviera en primero. Universidad Politécnica de Madrid, Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales, 2005. 128 p.
- [19] CHAPMAN STEPHEN, J. Matlab programming for engineers. 4 ed. Toronto: Thomson, 2008. 567 p. ISBN: 0495244511.

Recursos electrónicos

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR DE GIJÓN. *MANTENIMIENTO INDUSTRIAL. Interpretación de espectros.* (último acceso: junio 2010)

Disponible en

<http://156.35.33.98/DCIF//IMecanica/gestionEduardo/MI/Espectros.pdf>

BLOG BLINKDAGGER. *Matlab GUI tutorial – Integrating Simulink model into a GUI.* (último acceso: marzo 2010)

Disponible en

<http://blinkdagger.com/matlab/matlab-gui-tutorial-integrating-simulink-model-into-a-gui/3/>

